Satz: (Darstellungssatz von Riesz / Fréchet-Riesz)

> Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum und $F: \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ stetig und linear (d.h. ein stetiges, lineares Funktional).
> Dann existiert genau ein $\varphi \in \mathcal{H}$, so dass $\forall \psi \in \mathcal{H}: \; F(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$.

Beweis: Sei $h := \{\psi \in \mathcal{H} \mid F(\psi) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$. Da h ein abgeschlossener Unterraum ist und $h \neq \mathcal{H}$ falls $F \neq 0$, gibt es ein $f \in h^{\perp}$ mit $F(f) = 1$. Für alle $\psi \in \mathcal{H}$ ist dann $\psi - F(\psi) f \in h$ und damit $\langle f, \psi \rangle = \langle f, \psi - \psi + F(\psi) f \rangle = F(\psi) \|f\|^2$. Setze nun $\varphi := f / \|f\|^2$.
φ ist eindeutig, da $\forall \psi \in \mathcal{H}: \langle \varphi - \tilde{\varphi}, \psi \rangle = 0$ für $\psi := \varphi - \tilde{\varphi}$ impliziert, dass $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0$ und damit $\varphi = \tilde{\varphi}$.

$\square$

D.h. über das Skalarprodukt sind genau alle stetigen linearen Funktionale gegeben.