Anwendung: Spezielle Lsg. einer inhomogenen Diff.gl.

$$\boxed{\ddot{x} - x = f} \qquad \text{wobei } f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

Allgemeine Lösg.: $x(t) = \underbrace{c_+ e^{t} + c_- e^{-t}}_{\text{Lsg. der homogenen Gl. } \ddot{x} - x = 0} + \underbrace{x_s(t)}_{\text{spezielle Lsg.}}$

Nach FT. wird die DGL zu $\boxed{-(k^2+1)\,\hat{x}_s = \hat{f}}$

und $x_s(t) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ikt} \hat{x}_s(k)\, dk.$

Zur Lösung betrachte $\hat{f}\hat{g} = \hat{x}_s$ mit $\hat{g}(k) := -(1+k^2)^{-1}$. Dann ist

$$\boxed{x_s(t) = (2\pi)^{-1/2} (f * g)(t)} \qquad \text{mit } g(t) = -\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} \exp[-|t|]$$

„Green'sche Funktion"

Anwendung: Lösung der Wärmeleitungsgl. (Diffusionsgl.)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) = D \Delta \rho(x,t)} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad D > 0 \text{ „Diffusionskoeffizient"}$$

Anfangsbedingungen: $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, $\rho_0, \hat{\rho}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Nach F.T. bzgl. $x \leftrightarrow k$ bekommen wir:

$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(k,t) = -D\|k\|^2 \hat{\rho}(k,t)$ mit $\hat{\rho}(k,0) = \hat{\rho}_0(k)$ (nur noch gewöhnl. DGL)

Also $\hat{\rho}(k,t) = e^{-tD\|k\|^2} \hat{\rho}_0(k) =: \hat{G}(k,t)\, \hat{\rho}_0(k)$

alle FTs bzgl. $k \leftrightarrow x$, nicht t!

$$\rightarrow \boxed{\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y,t)\, \rho_0(y)\, dy}, \qquad G(x,t) = (2tD)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4tD}}$$