Def.: Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

- $\mathcal{L}^p(\Omega) := \{ f: \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar $| \int_\Omega |f(x)|^p \mu(dx) < \infty \}$ für $p \in [1, \infty)$
- $\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{ f: \Omega \to \mathbb{C}$ meßbar $| \exists c < \infty : |f(x)| \leq c$ fast überall $\}$
- $\| f \|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}$ für $p \in [1, \infty)$
- $\| f \|_\infty := \inf \{ c \in \mathbb{R} \,|\, |f(x)| \leq c$ fast überall $\}$

Bem.:

- $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum
- Wenn $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}^q(\Omega)$, dann ist $f \in \mathcal{L}^p$ $\forall p > q$ und $\lim_{p \to \infty} \| f \|_p = \| f \|_\infty$
- Ist das verwendete Maß μ das Zählmaß, so signalisiert man dies in der Notation und schreibt $L^p(\Omega)$ statt $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Ist darüberhinaus $\Omega = \mathbb{N}$ und $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, schreibt man l^p.
- $\| \cdot \|_p$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$ für $p \in [1, \infty]$.

  D.h. für alle $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

  (i) $\| \alpha f \|_p = |\alpha| \, \| f \|_p$ „Homogenität"

  (ii) $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$ „Δ-Ungl." (gilt i.a. nicht für $p < 1$)

  Zur Norm fehlt:

  (iii) $\| f \|_p = 0 \Rightarrow f = 0$

  Denn statt $f = 0$ gilt dies nur fast überall, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma: Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f: \Omega \to [0,\infty]$ meßbar, dann gilt:

$$\boxed{\int_\Omega f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}}$$

Beweis: "$\Leftarrow$" $0 \leq \int_\Omega f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}\right) dt \leq \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}\right) dt = 0$

"$\Rightarrow$" Sei $\Omega_n := \left\{x \in \Omega \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu(\Omega_n) = 0$, da

$0 \leq \frac{1}{n}\mu(\Omega_n) \leq \int_{\Omega_n} f \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu = 0$. Also $\mu(x \in \Omega \mid f(x) > 0)$

$= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n\right) = 0$ $\square$

Korollar: Ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ dann gilt:

$$\|f\|_p = 0 \iff \mu\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = 0$$

Um aus $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ einen normierten Raum zu machen, betrachtet man einen Quotientenraum ...

Einschub: Äquivalenzrelationen & Quotientenräume

Def.: Sind A, B Mengen, dann definiert eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ eine Relation.

Bsp.: Der Graph $G := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$ einer Funktion $f: A \to B$ definiert eine Relation.

<u>Def.:</u> • Auf einer Menge A definiert $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und wir schreiben $x \sim y$ für $(x,y) \in R$, wenn gilt $\forall x,y,z$:

(i) $x \sim x$ „Reflexivität"

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ „Symmetrie"

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ „Transitivität"

• Bzgl. einer gegebenen Äquivalenzrelation auf A heißt $[x] := \{ y \in A \mid x \sim y \}$ die Äquivalenzklasse von $x \in A$.

• Die Menge $A/\sim := \{ [x] \mid x \in A \}$ aller Äquivalenzklassen von A bzgl. $\sim$ heißt Quotientenraum

<u>Bsp.:</u> • Sei $A = \mathbb{R}^n$ und $v \in A \setminus \{0\}$. Dann definiert $x \sim y \Leftrightarrow \langle v, x \rangle = \langle v, y \rangle$ eine Äquivalenzrelation. $A/\sim$ ist der 1-dim. Raum der Hyperebenen, die orthogonal zu v sind.

<u>Bem.:</u> Gilt $\forall x \in A\ \exists y \in A: (x,y) \in R$, dann gilt $(ii) \wedge (iii) \Rightarrow (i)$, d.h. (i) wäre redundant. Für $R = \emptyset$ gilt jedoch $(ii) \wedge (iii) \wedge \neg (i)$.

<u>Def.:</u> Für $p \in [1,\infty]$ und einen beliebigen Maßraum (Ω, Σ, μ) definiert man $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$ wobei $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall.

<u>Bem.:</u> • $L^p(\Omega)$ ist nun wieder ein Vektorraum auf dem mit $\| [f] \|_p := \| f \|_p$ eine Norm definiert ist.

• Auch wenn die Elemente von $L^p(\Omega)$ i.a. Äquivalenzklassen von Funktionen sind, schreibt man $f \in L^p$ statt $[f] \in L^p$.

<u>Satz:</u> $\boxed{\text{Für } p \in [1,\infty] \text{ ist } \left(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\right) \text{ ein Banachraum.}}$