<u>Lemma:</u> Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f: \Omega \to [0,\infty]$ meßbar, dann gilt:

$$\boxed{\int_\Omega f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast überall}.}$$

<u>Beweis:</u> "$\Leftarrow$" $0 \leq \int_\Omega f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}) \, dt \leq \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}) \, dt = 0$

"$\Rightarrow$" Sei $\Omega_n := \{x \in \Omega \mid f(x) > \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu(\Omega_n) = 0$, da

$0 \leq \frac{1}{n} \mu(\Omega_n) \leq \int_{\Omega_n} f \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu = 0$. Also $\mu(x \in \Omega \mid f(x) > 0)$

$= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n\right) = 0$ $\square$

<u>Korollar:</u> Ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$ dann gilt:

$$\|f\|_p = 0 \iff \mu\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = 0$$

Um aus $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ einen normierten Raum zu machen, betrachtet man einen Quotientenraum ...

<u>Einschub:</u> Äquivalenzrelationen & Quotientenräume

<u>Def.:</u> Sind A, B Mengen, dann definiert eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$ eine Relation.

<u>Bsp.:</u> Der Graph $G := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$ einer Funktion $f: A \to B$ definiert eine Relation.

Def.: • Auf einer Menge A definiert $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und wir schreiben $x \sim y$ für $(x,y) \in R$, wenn gilt $\forall x,y,z$:

(i) $x \sim x$ „Reflexivität"

(ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ „Symmetrie"

(iii) $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ „Transitivität"

• Bzgl. einer gegebenen Äquivalenzrelation auf A heißt $[x] := \{ y \in A \mid x \sim y \}$ die Äquivalenzklasse von $x \in A$.

• Die Menge $A/\sim \; := \{ [x] \mid x \in A \}$ aller Äquivalenzklassen von A bzgl. $\sim$ heißt Quotientenraum

Bsp.: • Sei $A = \mathbb{R}^n$ und $v \in A \setminus \{0\}$. Dann definiert $x \sim y \Leftrightarrow \langle v, x \rangle = \langle v, y \rangle$ eine Äquivalenzrelation. $A/\sim$ ist der 1-dim. Raum der Hyperebenen, die orthogonal zu v sind.

Bem.: Gilt $\forall x \in A \; \exists y \in A: (x,y) \in R$, dann gilt $(ii) \wedge (iii) \Rightarrow (i)$, d.h. (i) wäre redundant. Für $R = \emptyset$ gilt jedoch $(ii) \wedge (iii) \wedge \neg (i)$.

Def.: Für $p \in [1, \infty]$ und einen beliebigen Maßraum (Ω, Σ, μ) definiert man $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$ wobei $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall.

Bem.: • $L^p(\Omega)$ ist nun wieder ein Vektorraum auf dem mit $\| [f] \|_p := \| f \|_p$ eine Norm definiert ist.

• Auch wenn die Elemente von $L^p(\Omega)$ i.a. Äquivalenzklassen von Funktionen sind, schreibt man $f \in L^p$ statt $[f] \in L^p$.

Satz: $\boxed{\text{Für } p \in [1,\infty] \text{ ist } \left(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p \right) \text{ ein Banachraum.}}$

V. FOURIERANALYSIS

Def.: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert als:

$$\boxed{\hat{f}(k) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx} \quad , \quad k\cdot x := \sum_{j=1}^n k_j x_j .$$

Bem.:
- Mit f ist auch $x \mapsto e^{-ik\cdot x} f(x)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so dass das Integral existiert
- Für die "2π"-Vorfaktoren gibt es unterschiedliche Konventionen. (sowohl vor dem Integral als auch im Exponenten)
- Die „Fouriertransformation" $f \mapsto \hat{f}$ ist oft ein Übergang der Art.

  Zeitdomäne $\to$ Frequenzraum oder

  Ortsraum $\to$ „k-Raum" / Impulsraum

Korollar: (Elementare Eigenschaften der F.T.):

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,\infty)$. Dann gilt:

(i) $f \mapsto \hat{f}$ ist linear in f

(ii) $g(x) := f(x-h) \Rightarrow \hat{g}(k) = e^{-ik\cdot h} \hat{f}(k)$

(iii) $g(x) := e^{ih\cdot x} f(x) \Rightarrow \hat{g}(k) = \hat{f}(k-h)$

(iv) $g(x) := f(\frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \hat{g}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$

Beweis: (i) folgt aus Linearität des Integrals

(ii) $\int e^{-ik\cdot x} f(x-h)\, dx \underset{y = x-h}{=} \int e^{-ik\cdot h} e^{-ik\cdot y} f(y)\, dy$

(iii) $\int e^{ih\cdot x} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx = \int e^{-i(k-h)\cdot x} f(x)\, dx$

(iv) $\int e^{-ik\cdot x} f(\frac{x}{\lambda})\, dx \underset{\uparrow}{=} \lambda^n \int e^{-i\lambda k\cdot y} f(y)\, dy$

$y = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial y_l} = \delta_{il} \lambda$

$\square$