Zentralübung

Z14.1. Konvergenz im Prähilbertraum

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie konkret eine orthogonale Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$ an.

Z14.2. Matrixelemente eines beschränkten Operators

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB des Hilbertraums $\mathcal{H}$.

(a) Sei $\tilde{\phi}_m := A\phi_m \in \mathcal{H}$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$, dass

$$A\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_m \langle \phi_m, \psi \rangle.$$

(b) Seien $A_{nm} := \langle \phi_n, A\phi_m \rangle$ die Matrixelemente von A. Dann gilt für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$, dass

$$A\psi = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \phi_n A_{nm} \langle \phi_m, \psi \rangle.$$

(c) Setzt man allgemein für $\psi \in \mathcal{H}$: $(\psi)_n := \langle \phi_n, \psi \rangle$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(A\psi)_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} (\psi)_m.$$

Z14.3. Beispiele für unstetige lineare Operatoren und nichtbijektive Isometrien

Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ mit der Standard-ONB $(\mathrm{e}_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

(a) Man gebe ein Beispiel für einen unstetigen linearen Operator mit Definitionsbereich in $\mathcal{H}$ an.

(b) Man finde einen linearen Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$, der das Skalarprodukt erhält, aber nicht bijektiv ist.