Zentralübung

Z13.1. Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Parallelogrammgleichung

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$:

(a) $|\langle\phi,\psi\rangle|^2 \le \langle\phi,\phi\rangle\langle\psi,\psi\rangle$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(b) $\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$ (Parallelogrammgleichung)

Z13.2. Polarisationsidentität

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Polarisationsidentität lautet:

$$\langle\phi,\psi\rangle = \frac{1}{4}\sum_{r\in\{z\in\mathbb{K}\,|\,z^4=1\}} r\|r\phi+\psi\|^2$$

Beweisen Sie, dass diese für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$ gilt, im Fall (a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und (b) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Z13.3. Konstruktion eines Skalarprodukts aus geeigneter Norm

Sei $(V,\|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung immer gilt. Zeigen Sie, dass dann die Polarisationsidentität $\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2)$ ein Skalarprodukt auf V definiert.
Hinweis: Zeigen Sie für die Linearität zunächst, dass $\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle = 2\langle x, \frac{1}{2}(y+z)\rangle$.

Präsenzaufgaben

P13.1. Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit

Zeigen Sie: Ist $E\subseteq\mathcal{H}\setminus\{0\}$ eine Menge paarweise zueinander orthogonaler Vektoren im Prähilbertraum $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, so ist E eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

P13.2. Nichtabgeschlossene Unterräume im Hilbertraum

Sei $V := \{\psi\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\,|\,\exists N\in\mathbb{N}\forall n\ge N : \psi_n = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) V ist ein Unterraum des $\ell_2(\mathbb{N})$, aufgespannt von den Einheitsvektoren e_i, $i\in\mathbb{N}$.

(b) V ist nicht abgeschlossen und $\overline{V} = \ell_2(\mathbb{N})$.

(c) Für $\psi\in\ell_2(\mathbb{N})\setminus V$ und $V_\psi := \{\phi\in V\,|\,\langle\psi,\phi\rangle = 0\}$ ist $\mathrm{e}_1 + V_\psi$ konvex, aber es gibt kein $\phi\in\mathrm{e}_1+V_\psi$, so dass $\forall\chi\in\mathrm{e}_1+V_\psi : \|\phi\|\le\|\chi\|$.

P13.3. Fréchet-Riesz-Darstellungssatz

Bestimmen Sie für die gegebenen Hilberträume $\mathcal{H}$ und linearen Funktionale $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ jeweils einen Vektor $\psi\in\mathcal{H}$, so dass $f(\phi) = \langle\psi,\phi\rangle$ für alle $\phi\in\mathcal{H}$ gilt.

(a) $\mathcal{H}=\mathbb{C}^3$, $f(\phi) = 2\phi_1 - \mathrm{i}\phi_3$.

(b) $\mathcal{H}=\mathbb{C}^{2\times2}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A,B\rangle = \overline{A_{11}}B_{11} + \overline{A_{12}}B_{12} + \overline{A_{21}}B_{21} + \overline{A_{22}}B_{22}$ und $f(B) = \mathrm{i}(B_{12}-B_{21})$.

(c) $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, $f(\phi) = (1+\mathrm{i})\int_{-1}^{1}\phi(x)\mathrm{d}x$.

(d) $\mathcal{H}=\ell_2(\mathbb{N})$, $f(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n}{n}$.

Warum sind die linearen Funktionale stetig?

Hausaufgaben

H13.1. Volumenberechnung

Berechnen Sie das Volumen der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } y^2 + z^2 \leq 1\}$.
HINWEIS: Integrieren Sie die z-Variable als letztes aus.

H13.2. Uneigentliches Integral

Berechnen Sie $\int\limits_{0<y<x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}(x, y)$.

H13.3. Zirkulation eines Vektorfeldes

Es bezeichne $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r\}$ die Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$. Sei nun $M := K_7(0, 0) \setminus (K_2(0, -4) \cup K_1(0, 0) \cup K_1(-3, 3) \cup K_1(3, 3))$. Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + x^2 \sin(x) \\ \tanh(y) + 3x \end{pmatrix}$$

entlang des positiv orientierten Randes von M.

H13.4. Residuen

Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{z}{\sin z \cos z}$.

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und klassifizieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie die Werte aller Residuen von f.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_{|z-\pi|=4} f(z) \mathrm{d}z$.

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe von f im Entwicklungspunkt 0?

H13.5. Fouriertransformation

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}$ und das Integral $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag 7.2.2019, vor der Zentralübung
Die Aufgaben werden nicht korrigiert, können aber gegebenenfalls als sinnvoll bearbeitet gewertet werden.