Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2018/19
Blatt 11
(10.01.2019)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Zentralübung

Z11.1. Glattheit und Abfall der Fouriertransformation

(a) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $j = 0, \dots, m$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|^m}\big) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

(b) Berechnen Sie direkt die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass $g(x) = x^m \mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, m–mal stetig differenzierbar ist, $m \in \mathbb{N}$, indem Sie Eigenschaften der Fouriertransformierten $\widehat{g}$ ausnutzen.

Z11.2. Eigenschaften der Faltung

Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

(a) **(Kommutativität)** $f * g = g * f$,

(b) **(Assoziativität)** $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) **(Distributivität)** $f * (g + h) = f * g + f * h$,

(d) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Z11.3. Faltung und Differenzierbarkeit

Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $u * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(u * f)^{(k)}(x) = (u^{(k)} * f)(x).$$

Präsenzaufgaben

P11.1. Fouriertransformation bei linearer Abbildung

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie: Ist A eine invertierbare $n \times n$–Matrix, dann gilt für die Fouriertransformierte von $f_A(x) := f(Ax)$:

$$\widehat{f_A}(k) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}\left((A^T)^{-1} k\right).$$

P11.2. Eigenschaften der Fouriertransformation

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Welche Eigenschaften haben dann sowohl f als auch $\widehat{f}$?

(b) Drücken Sie $\widehat{\widehat{f}}$, $\widehat{\widehat{\widehat{f}}}$ und $\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}$ durch f und $\widehat{f}$ aus.

(c) Zeigen Sie:

(i) f ist reell und gerade $\Rightarrow$ $\widehat{f}$ ist reell und gerade,

(ii) f ist reell und ungerade $\Rightarrow$ $\widehat{f}$ ist rein imaginär und ungerade.

P11.3. Faltung

Berechnen und skizzieren Sie die Faltung von $\chi_{[-5,5]}$ mit
(i) $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, (iii) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ und (iv) $\frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Hausaufgaben

H11.1. Hermite-Polynome

(a) Berechnen und skizzieren Sie $f^{(n)}(x)$ und ihre Fouriertransformierten für $n = 0, 1, 2$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Bestimmen Sie linear unabhängige $h_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, jeweils als Linearkombination von $f^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, so dass $\widehat{h_n}(k) = \lambda_n h_n(k)$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, und skizzieren Sie diese.

H11.2. Inverse Fouriertransformation

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$ gilt.

Hinweis: Warum ist hier $\check{\hat{f}} = f$?

H11.3. Fouriertransformationen des Halbkreises

Berechnen Sie die Fouriertransformationen von $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie f, g und ihre Fouriertransformationen.
Hinweis: Substitution $x = \sin t$, für g noch partielle Integration. Die Besselfunktionen sind gegeben durch $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(x \sin t - nt) \mathrm{d}t = J_{-n}(-x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 24.01.2019, vor der Zentralübung