TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Wintersem. 2018/19
Blatt 10
(20.12.2018)
http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Zentralübung

Z10.1. Vertauschen von Summe und Integral

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenzsätze aus der Vorlesung:

(a) Seien $g_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, messbar. Dann gilt $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

(b) Seien $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar und $\sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ fast überall absolut konvergent und $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

Z10.2. $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum

Zeige, dass $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\sim$ mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} | \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}$ und der Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall, mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \geq 1$ ein Banachraum ist.

Z10.3. Vertauschen von Limes und Integral

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x) \mathrm{d}x$, stetig ist.

(b) Sei $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar nach der ersten Variable. Für alle $\lambda \in [a, b]$ seien $x \mapsto g(\lambda, x)$ und $x \mapsto \partial_1 g(\lambda, x)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ und für alle x sei $|\partial_1 g(\lambda, x)| \leq h(x)$ mit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, x) \mathrm{d}x.$$

Präsenzaufgaben

P10.1. Spezialfall der Gleichheit von Lebesgue- und Riemann-Integral

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $F(t) := \mu(\{x \in [0, 1] \,|\, f(x) > t\})$ für $t \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von $f : [0, 1] \to [0, f(0)]$ ist.

(b) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(t) \mathrm{d}t$.

P10.2. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}}{z}$, $k > 0$ und $\gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Ist das ein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz?

P10.3. Breit-Wigner-Verteilung

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen, $a > 0$.

(a) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, (b) $F(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

Hausaufgaben

H10.1. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0, \infty]$, $\mu(A) = |A|$ für $A \subseteq \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Benutzen Sie, dass bei festem k die Folge $\binom{n}{k}\frac{|z|^k}{n^k}$ für $n \to \infty$ monoton gegen $\frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

H10.2. Ableitung der Gammafunktion

Für $x > 0$ ist die Gammafunktion definiert als $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Begründen sie, warum der Integrand auf $\mathbb{R}^+$ integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$: $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist. Wie lautet der Integralausdruck für die Ableitung?

H10.3. Beispiele

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \max\{0, a - |x|\}$, $a > 0$,

(b) $g(x) = \frac{1}{x^4+4}$.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 17.01.2019, vor der Zentralübung

Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und ein gutes neues Jahr 2019!