Zentralübung

Z8.1. Hauptteil

Sei $U \subset C$ offen und $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol k-ter Ordnung bei a. Dann sind die Koeffizienten des Hauptteils von f, $\sum_{j=1}^{k} \frac{c_{-j}}{(z-a)^j}$, explizit gegeben durch

$$c_{-j} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{z\to a} \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{k-j} \left((z-a)^k f(z)\right), \quad j = 1, \dots, k.$$

Z8.2. Partialbruchzerlegung

Seien p, q Polynome. Dann lautet die eindeutig bestimmte Partialbruchzerlegung der gebrochen rationalen Funktion $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = g(z) + \sum_{j=1}^{l} H_{z_j}(z)$$

wobei die z_j, $j = 1, \dots l$, die Nullstellen von q sind, $H_{z_j}(z)$ die zugehörigen Hauptteile von $\frac{p}{q}$ bei z_j sind, und g ein Polynom ist.

(a) Welchen Grad hat g?

(b) Wieviele Koeffizienten gibt es insgesamt zu bestimmen?

(c) Welchen Ansatz kann man für $\frac{z^5}{(z-1)^2(z-2)}$ machen?

(d) Wie bestimmt man g und die Hauptteile explizit?

Z8.3. Anwendung des Residuensatzes

Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{b+\sin t}$ für $b > 1$. Hinweis: Man schreibe das Integral als komplexes Kurvenintegral mit holomorphem Integranden entlang der Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Präsenzaufgaben

P8.1. Isolierte Singularitäten

Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(a) $f(z) = \frac{z-1}{(z^4-1)^2}$, (b) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, (c) $f(z) = z^2 \mathrm{e}^{-z^{-4}}$, (d) $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

P8.2. Laurentreihenentwicklung

(a) Geben Sie alle Laurentreihenentwicklungen von $\frac{1}{z-z_0}$ um 0 an, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Geben Sie alle Laurententwicklungen von $\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ im Ursprung an.

P8.3. Anwendung des Residuensatzes

Zeigen Sie: $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2p\cos t + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2}$$ für alle $p \in \mathbb{C}$ mit $|p| < 1$.

Hausaufgaben

H8.1. Laurentreihenentwicklungen

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen einschließlich Konvergenzbereich auf punktierten Kreisscheiben um die isolierten Singularitäten von

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$, (c) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$, (d) $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.

H8.2. Die Besselfunktionen

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $f_z(w) = e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})}$ auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Laurentreihenentwicklung

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) w^n$$

$J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt die n-te Besselfunktion. Man zeige

(a) Für $n \geq 0$ ist $J_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$.

(b) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(z \sin t - nt) \mathrm{d}t$.

Hinweis: Man benutze die Integraldarstellung der Laurentkoeffizienten; in (a) durch geeignetes Einsetzen von Exponentialreihen; in (b) durch Auswerten entlang der Einheitskreislinie.

H8.3. Residuen von Einheitswurzeln

(a) Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, zeige man $\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z^n - c}\right) = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}$, falls $f(z)$ bei z_0 holomorph und z_0 eine Nullstelle des Nenners ist.

(b) Geben Sie alle Residuen von $\frac{1}{1+z^{2n}}$ an.

(c) Bestimmen Sie $\oint\limits_{\partial G} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}}$, wobei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $R > 1$?

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 20.12.2018, vor der Zentralübung