TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Wintersem. 2018/19
Blatt 7
(29.11.2018)

Zentralübung

Z7.1. Komplexer Sinus und Cosinus

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ für $z \in \mathbb{C}$ definiert den komplexen Cosinus und Sinus. Entsprechend setzt man $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ und $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ für $z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Benutzen Sie die Funktionalgleichung $e^z e^w = e^{z+w}$ für $w, z \in \mathbb{C}$ und die bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Additionstheoreme für komplexe Argumente.

(b) Es gilt $\cos iz = \cosh z$, $\sin iz = i \sinh z$.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es, $\sin' z = \cos z$ und $\cos' z = -\sin z$ zu beweisen?

(e) Bestimmen Sie alle Nullstellen von exp, sin und cos mit Vielfachheit.

Z7.2. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

Z7.3. Der Identitätssatz

Seien f und g holomorphe Funktionen.

(a) Sei $f(z) = \ln(z)$, der Hauptzweig des Logarithmus, $g(z) = \ln(-z) + i\pi$. Zeigen Sie, dass f und g auf $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ übereinstimmen. Dennoch gilt $f \neq g$.

(b) Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.

(c) Ist $g(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

Z7.4. Wurzelsingularität

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$?

Präsenzaufgaben

P7.1. Anwendung des Satzes von Liouville

(a) Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom, so ist $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Dann ist $f(\mathbb{C})$ offen und dicht in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

(c) Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

P7.2. Anwendungen des Identitätssatzes

Wieviele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (c) $f(\pi n) = 0$, (d) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$.

P7.3. Nullstellen und Pole

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer.

(a) Die holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ habe eine k-fache Nullstelle bei $z_0 \in U$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ gibt, mit $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z) \qquad \text{für alle } z \in U.$$

(b) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, $k, l \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass gilt:
Für $k \geq l$ besitzt die analytische Fortsetzung von $\frac{f}{g}$ in z_0 eine $(k - l)$-fache Nullstelle.
Für $k < l$ besitzt $\frac{f}{g}$ einen Pol $(l - k)$-ter Ordnung bei z_0.

Hausaufgaben

H7.1. Analytische Fortsetzung

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n z^n$ für $|z| < 1$.

(a) Bestimmen Sie die analytische Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf einem größtmöglichen Gebiet.
Hinweis: Ableitung der geometrischen Reihe.

(b) Gibt es eine analytische Fortsetzung von f entlang der Wege $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, 2]$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$? Wenn ja, was ist dann ihr Wert im Endpunkt von γ_1 bzw. γ_2?

H7.2. Bernoulli-Zahlen

Charakterisieren Sie die Singularitäten von $z \mapsto \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.
Welchen Konvergenzradius hat die Taylorentwicklung $\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$?
Bemerkung: Die B_n sind die sogenannten Bernoulli-Zahlen,
$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$.
Was können Sie zu der Vermutung, dass die B_n beschränkt sind, sagen?

H7.3. Vergleich ganzer Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$, so dass $f = cg$.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 13.12.2018, vor der Zentralübung