TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Wintersem. 2018/19
Blatt 6
(22.11.2018)

Zentralübung

Z6.1. Potenzreihen sind analytisch

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$ und $z_0 \in B_R(0)$.

(a) Zeigen Sie, dass f bei $z = 0$ komplex differenzierbar ist. Wie lautet die Ableitung?

(b) Geben Sie für eine Doppelfolge $c : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine hinreichende Bedingung an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}$ gilt.

(c) Für $|z - z_0| < R - |z_0|$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |a_n|\, |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k < \infty$.

(d) Bestimmen Sie eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, so dass $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ für $|z-z_0| < R-|z_0|$.

Hinweis: Man setze in der Potenzreihe $z=(z-z_0)+z_0$. Ergebnis: $b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} z_0^n$

(e) Wie lautet also die Ableitung von f im Punkt z_0?

Z6.2. Ableitung entlang einer Kurve

Sei Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to U$ eine C^1-Kurve. Man zeige:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0)$ für alle $t_0 \in [a, b]$.

(b) Es gilt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, falls F eine Stammfunktion von f ist.

Z6.3. Komplexe Wegintegrale

Sei γ eine Kurve entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z, |z| < 2\}$.

Berechnen Sie (a) $\oint_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ und (c) $\oint_\gamma \frac{e^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z$.

Präsenzaufgaben

P6.1. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

P6.2. Homotopie und einfach zusammenhängende Mengen

Zeigen Sie:

(a) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist nullhomotop in $\mathbb{C}$.

(b) Jede sternförmige Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomotop.

(d) Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

P6.3. Potenzreihen gebrochen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung und Konvergenzradius von

(a) $\frac{1}{z-a}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\frac{1}{1+z^2}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$,

Hausaufgaben

H6.1. Die allgemeine Potenz und ihre Reihenentwicklung

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die allgemeine Potenz definiert als $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$, wobei $\ln(re^{\mathrm{i}\phi}) := \mathrm{i}\phi + \ln r$ für $r > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, der auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (unstetig) fortgesetzte Hauptzweig des Logarithmus ist. Man zeige:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$ für $z \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

(b) Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ist z^α auf $\mathbb{R}^-$ nicht stetig. Hinweis: Betrachte $\gamma(t) = re^{\mathrm{i}(\pi+t)}$ bei $t = 0$.

(c) Für $|z| < 1$ gilt mit $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdots \frac{\alpha-k+1}{k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $(1+z)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$.

Hinweis: Man berechne die Ableitungen von $f(z) = (1+z)^\alpha$ im Ursprung.

H6.2. Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Berechnen sie $\int\limits_\gamma z \mathrm{e}^{\pi z^2} \mathrm{d}z$, wobei γ die Kurve von 0 nach $1 + \mathrm{i}$ entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt i ist.

H6.3. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-w^2} \mathrm{d}w$$

und damit nach dem Satz von Cauchy-Goursat eine ganze Funktion.

(a) Drücken Sie die beiden unvollständigen Fresnel-Integrale $\mathrm{C}(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$ und $\mathrm{S}(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ jeweils durch $\operatorname{erf}(z)$ aus. Hinweis: Man wähle $z = xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) Zeigen Sie für die Kurve $\gamma(t) = re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $r > 0$: $\left| \int\limits_\gamma e^{-w^2} \mathrm{d}w \right| \leq \frac{\pi}{4r}$.

Hinweis: Man benutze $\cos(2t) \geq 1 - \frac{4t}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ unter Benutzung von (a) und (b) und der bekannten reellen Asymptotik $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$. Hinweis: Betrachten sie das Kurvenintegral entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}], |z| \leq r\}$ für $r \to \infty$.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 6.12.2018, vor der Zentralübung