Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2018/19
Blatt 5
(15.11.2018)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Zentralübung

Z5.1. Divergenz als Quellstärke

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \Omega$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(B_r(x))} \int\limits_{\partial B_r(x)} \langle F(y), \mathrm{n}(y)\rangle \mathrm{dS}(y) = \mathrm{div}F(x)$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\mathrm{n}(y)$ das äußere Normalenfeld an $\partial B_r(x)$.

Z5.2. Die zweite Greensche Formel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, äußerem Normalenfeld v und sei $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Richtungsableitung von g in $x \in \partial A$ bezüglich v ist definiert als

$$\partial_v g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x + tv(x))\Big|_{t=0}.$$

(a) Man zeige $\partial_v g(x) = \langle \mathrm{grad}\, g(x), v(x)\rangle$, kurz $\partial_v g = \langle \nabla g, v\rangle$.

(b) Man beweise die zweite Greensche Formel

$$\int\limits_{\partial A} (f\partial_v g - g\partial_v f)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{A} (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}^n x.$$

Z5.3. Eine Integralidentität

Sei A ein orientiertes Flächenstück auf das der Satz von Stokes anwendbar ist. Zeigen Sie für $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\int\limits_{\partial A} f(r)\nabla g(r) \cdot \mathrm{d}r = \int\limits_{A} \langle \nabla f \times \nabla g, v\rangle\,\mathrm{dS}.$$

Präsenzaufgaben

P5.1. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz von E.

(b) Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0)$, $R > 0$.

(c) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, $0 \notin \partial K$. Berechnen Sie $\int\limits_{\partial K} \langle E, v\rangle \mathrm{dS}$ für die beiden Fälle $0 \notin K$ und $0 \in K \setminus \partial K$. Hinweis: Satz von Gauß.

P5.2. Ein magnetischer Monopol besitzt kein Vektorpotential

Gegeben ist das Vektorfeld $B(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $A : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ offen heißt Vektorpotential von B auf U, wenn $\mathrm{rot}\, A = B$ gilt. Zeigen Sie, dass B auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Satz von Stokes für ein geeignetes Flächenstück.

P5.3. Satz von Stokes

Sei $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$ mit in positive z-Richtung orientiertem Normalenfeld. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(x,y,z) = (3y, -2xz, yz^2)$ den Fluss der Rotation von F durch A direkt und mittels der Zirkulation von F entlang ∂A über den Satz von Stokes.

Hausaufgaben

H5.1. Eine Punktladung auf dem Rand

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0,0,R)$, $R > 0$, als uneigentliches Integral. Hinweis: $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = |\sin\frac{\theta}{2}|$.

H5.2. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z,\ z \in (1/2, 1)\}$ ein Teil eines Paraboloids und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x,y,z) = (yz, -xz, 1)$. Berechnen Sie $\int_M \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{dS}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei $\mathbf{n}$ das stetige Normalenfeld an M ist, das nach außen zeigt.

H5.3. Satz von Stokes, Klausuraufgabe

Gegeben sei $S_+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, so orientiert, dass das Normalenfeld vom Ursprung weg zeigt, und das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + 4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2 + z^2) + e^{4y^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} F$ durch S_+ mit Hilfe des Satzes von Stokes einmal als Linienintegral und als möglichst einfaches Flächenintegral.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 29.11.2018, vor der Zentralübung