TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W

Wintersem. 2018/19
Blatt 4
(8.11.2018)

Zentralübung

Z4.1. Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$, y–Richtung

Sei $V = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $I = (c, d) \subseteq \mathbb{R}$, $h \in C^1(\overline{V}, I)$ und

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq h(x)\}, \qquad M = G_h = \{(x, h(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

Weiter sei ein C^1–Vektorfeld $F : \overline{V \times I} \to \mathbb{R}^2$ gegeben mit $\operatorname{supp}(F) \subseteq V \times I$.

a) Geben Sie das äußere Normalenfeld v von A auf $M \subseteq \partial A$ explizit an.

b) Sei $F(x, y) = f(x, y)e_y$ mit $f : \overline{V \times I} \to \mathbb{R}$. Reproduzieren Sie den Beweis für

$$\int\limits_A \operatorname{div} F(x, y) \mathrm{d}(x, y) = \int\limits_{\partial A} \langle F(x, y), v(x, y)\rangle \mathrm{dS}(x, y)$$

an Hand des Beweises des Lemmas aus der Vorlesung.

c) Skizzieren Sie den Beweis des Satzes von Gauß für die Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von (b), dem Ergebnis von H4.1. und dem Satz von Gauß für Quader.

Z4.2. k-dimensionale Nullmengen im $\mathbb{R}^n$

Seien $N \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$, M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und N eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $l < k \leq n$. Dann ist $\operatorname{vol}_k(N) = 0$.

Z4.3. Fluss eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ das durch die beiden Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm mit dem bezüglich v_1, v_2 rechtshändigen Normalenvektorfeld v_A. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $F(x) = F_0 \in \mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes F durch das Flächenstück A, $\Psi_F(A)$, gegeben ist durch

$$\Psi_F(A) = \int\limits_A \langle F(x), v_A(x)\rangle \mathrm{dS}(x).$$

Präsenzaufgaben

P4.1. Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals

Seinen $\Phi : V \to U$ und $\Psi : \tilde{V} \to U$ Parametrisierungen in einer kompakten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar über $U = \Phi(V) = \Psi(\tilde{V}) \subseteq M$. Man zeige

$$\int\limits_V f(\Phi(u))\sqrt{g^\Phi(u)}\, \mathrm{d}u = \int\limits_{\tilde{V}} f(\Psi(\tilde{u}))\sqrt{g^\Psi(\tilde{u})}\, \mathrm{d}\tilde{u}.$$

P4.2. Gramsche Determinante und äußeres Normalenfeld von Flächen im Raum

Sei $\Psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine C^1-Parametrisierung des Flächenstücks V und das Normalenfeld $v : V \to \mathbb{R}^3$ bilde ein Rechtssystem mit den Basisvektoren des Tangentialraums $\partial_1\Psi$, $\partial_2\Psi$. Zeigen Sie

(a) $\sqrt{g(u)} = \|\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\|$,

(b) Für stetiges $F : V \to \mathbb{R}^3$ ist $\int\limits_V \langle F, v\rangle \mathrm{dS} = \int\limits_U \langle F(\Psi(u)), \partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\rangle \mathrm{d}^2u$.

P4.3. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Bestätigen Sie für den Paraboloidenstumpf

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (x + y, y + z, x + z)$ den Satz von Gauß.

Hausaufgaben

H4.1. Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$, x–Richtung

Mit den gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe Z4.1. reproduziere man den Beweis des Satzes von Gauß auf A, falls $F(x, y) = f(x, y)e_x$ mit $f : \overline{V \times I} \to \mathbb{R}$.

H4.2. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern I

Gegeben sei der Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x - y, xz, x^2{+}y^2{+}z^2)$. Bestätigen Sie den Satz von Gauß explizit.

H4.3. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern II

Gegeben sei die Halbkugel $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \leq 0\}$ und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x - y, xz, x^2{+}y^2{+}z^2)$. Bestätigen Sie den Satz von Gauß explizit.

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 22.11.2018, vor der Zentralübung