TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

Wintersem. 2018/19
Blatt 2
(25.10.2018)

`http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2018W`

Zentralübung

Z2.1. Transformationssatz für uneigentliche Integrale

Man beweise: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei (A_k) eine ausschöpfende Folge kompakter Mengen von U, so dass $(g(A_k))$ eine ausschöpfende Folge von $g(U)$ ist. Dann gilt

$$\int\limits_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_U f(g(u))|\det J_g(u)|\mathrm{d}^n u$$

falls auf einer Seite das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

Z2.2. Transformationssatz für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar:

- (Zylinderkoordinaten)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3 x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

- (Kugelkoordinaten)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3 x = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

Präsenzaufgaben

P2.1. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int\limits_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$, $g(u) = \sin u$.

(b) $\mathrm{vol}(B)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \le 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

BEMERKUNG: g entspricht der komplexen Quadratfunktion $z \mapsto z^2$.

P2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten I

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine in Polarkoordinaten gegebene geschlossene Kurve um den Ursprung, d.h., $\binom{\gamma_1}{\gamma_2}(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \binom{\rho\cos\phi}{\rho\sin\phi}$ für (ρ, ϕ).

P2.3. Uneigentliche Integrale

Für welche Werte von $\alpha > 0$ existiert für $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, das Integral über die Einheitskugel, $\int\limits_{\|x\| \leq 1} f(x) \mathrm{d}^d x$, $d = 1, 2, 3$?

Hausaufgaben

H2.1. Uneigentliches Integral

Berechnen Sie das Integral von $f(x, y) = e^{-y^2}$ auf der Menge $A = \{0 \leq x \leq y\}$ mit Hilfe einer geeigneten ausschöpfenden Folge.

H2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten II

Wie in P2.2 sei $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, hier mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \rho\gamma(\phi)$ für $(\rho, \phi) \in A := [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

H2.3. Newtonsches Theorem

Ein Kugelsternhaufen habe die radialsymmetrische mittlere Massendichte $m(x) = \rho(\|x\|)$, mit $\rho : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ stetig, $r^3\rho(r) \to 0$ für $r \to \infty$. Das Gravitationspotential ist

$$V(x) := -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{m(y)}{\|x - y\|} \mathrm{d}^3 y, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Wie groß ist die Masse $M(R)$ innerhalb der Kugel mit Radius R?

(b) Berechnen Sie $V(x)$ und zeigen Sie, dass das Kraftfeld $F(x) := -\operatorname{grad} V(x)$ gegeben ist durch $F(x) = -\frac{M(\|x\|)x}{\|x\|^3}$, also der Gravitationskraft eines Punktes im Ursprung mit Masse $M(\|x\|)$ entspricht.
HINWEIS: Aus Symmetriegründen hängt $V(x)$ nur von $\|x\|$ ab. Man berechne $V(0, 0, d)$ in Kugelkoordinaten und benutze dabei, dass

$$\frac{rd\sin\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} = \frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}.$$

Hausaufgabenabgabe: Donnerstag, 8.11.2018, vor der Zentralübung