*Lösung P.2.1.(b)*: Um hier den Transformationssatz anwenden zu können, müssen wir erst zeigen, dass

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to g(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \qquad (u,v) \mapsto (u^2 - v^2, 2uv)$$

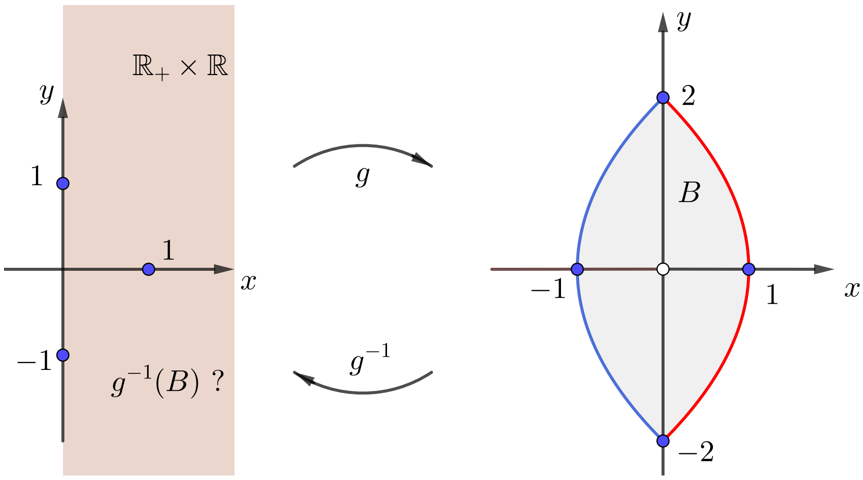
ein $C^1$-Diffeomorphismus ist. Da der Definitionsbereich von $g$ offen ist, reicht es zu zeigen, dass $g$ injektiv ist *(aus* $g(u_1, v_1) = g(u_2, v_2)$ *für beliebiges* $u_1, u_2 > 0$ *und* $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ *folgt* $u_1 = u_2$ *und* $v_1 = v_2$*)* und $\det(J_g(x,y)) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Injektivität ist schnell nachgerechnet und

$$\det(J_g(x,y)) = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4(u^2 + v^2) > 0 \qquad (\text{da } u > 0)\,.$$

Angenommen, wir würden die Menge $A \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ schon kennen, die $g(A) = B$ erfüllt, dann besagt die Transformationsformel

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B 1\, d^2x = \int_{g(A)} 1\, d^2x = 4 \int_A u^2 + v^2\, d(u,v)\,.$$

Alles, was an dieser Stelle also fehlt ist ein expliziter Ausdruck für $A = g^{-1}(B)$ (falls letzterer Ausdruck wohldefiniert ist).




Die Strategie zur Bestimmung von $g^{-1}(B)$ besteht nun aus den folgenden Schritten:

- Berechnung der Inversen von $g$ auf $g(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$
- Bestimmung von $g^{-1}(\partial B) = \partial(g^{-1}(B))$, da $B$ eine zusammenhängende Menge und $g^{-1}$ stetig ist (wir haben oben gezeigt, dass $g^{-1}$ auf $g(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ sogar stetig differenzierbar ist). Grob gesprochen: wenn wir wissen, wie sich der Rand von $B$ unter $g^{-1}$ verhält, ist $g^{-1}(B)$ das, was von dieser transformierten Menge eingeschlossen wird.

Die Inverse von $g$ bestimmen wir formal, indem wir das Gleichungssystem $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ nach $u > 0, v \in \mathbb{R}$ auflösen. Die zweite Gleichung liefert $v = y/2u$, was eingesetzt in die Erste ergibt

$$x = u^2 - \frac{y^2}{4u^2} \quad \overset{\cdot u^2(>0)}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = u^4 - xu^2 - \frac{y^2}{4} \quad \overset{z:=u^2}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = z^2 - xz - \frac{y^2}{4}\,.$$

Diese quadratische Gleichung wird offensichtlich gelöst von

$$z = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2} \quad \overset{u=\sqrt{z}>0}{\Longleftrightarrow} \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\,.$$

Von $z_\pm$ interessiert uns nur die positive Lösung $z_+$ (wegen $u, z > 0$), womit $u$ hier eindeutig bestimmt ist. Die Umkehrabbildung lautet dann

$$\begin{aligned} g^{-1} : g(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ gilt, sehen wir, dass $g^{-1}$ genau dort wohldefiniert ist, wo $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, also wenn $y \neq 0$ oder $x > 0$. Somit ist

$$g(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0 \,\vee\, x > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(-\infty, 0] \times \{0\}\big\}\,,$$

was, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, gerade der geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ entspricht.

Nun können wir bestimmen, wie $g^{-1}$ auf den Rand $\partial B$ von $B$ wirkt – beziehungsweise auf $\partial B \setminus \{(-1, 0)\}$, da $g^{-1}$ auf $(-1, 0) \notin g(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ wie oben gesehen nicht wohldefiniert ist. Die rechte Hälfte von $\partial B$ ist nach Definition parametrisiert durch $(1 - \frac{y^2}{4}, y)$ für $y \in [-2, 2]$. Dies in $g^{-1}$ eingesetzt liefert

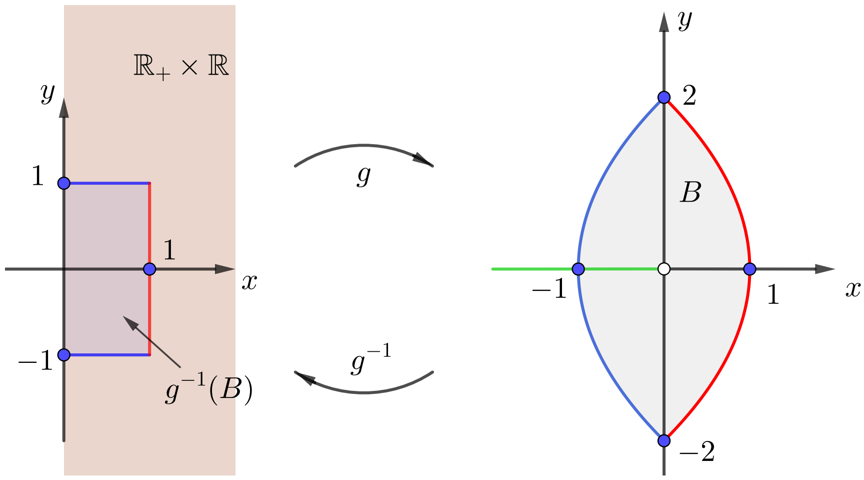
$$g^{-1}\begin{pmatrix} 1 - \frac{y^2}{4} \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} + 1 + \frac{y^2}{4}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}+1+\frac{y^2}{4}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y/2 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $y \in [-2, 2]$ ein, erhält man gerade die Menge $\{1\} \times [-1, 1]$. Für die linke Hälfte $(-1 + \frac{y^2}{4}, y)$, $y \in [-2, 2] \setminus \{0\}$ von $\partial B$ erhalten wir analog

$$g^{-1}\begin{pmatrix} -1 + \frac{y^2}{4} \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{-1 + \frac{y^2}{4} + 1 + \frac{y^2}{4}} \\ \frac{y}{\sqrt{-1+\frac{y^2}{4}+1+\frac{y^2}{4}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|y|}{2} \\ \frac{y}{|y|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y|/2 \\ \operatorname{sgn}(y) \end{pmatrix}.$$

Setzt man $y \in (0, 2]$ ein, erhält man $(0, 1] \times \{1\}$ (da $y$ hier positives Vorzeichen hat, also $\operatorname{sgn}(y) = 1$), und für $y \in [-2, 0)$ entsprechend $(0, 1] \times \{-1\}$.

Dies ist in der folgenden Abbildung visualisiert:




Wir wissen also nun, dass $(0,1] \times [-1,1]$ von $g$ diffeomorph auf

$$B' := B \setminus \underbrace{\{[-1,0] \times \{0\}\}}_{\substack{\text{hier ist } g^{-1}\text{nicht wohldefiniert, aber} \\ \text{dies ist (zum Glück) eine Nullmenge im } \mathbb{R}^2}}$$

abgebildet wird – bzw. $\overline{g(\,(0,1] \times [-1,1]\,)} = B$. Der Transformationssatz liefert schlussendlich

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B') = \int_{B'} 1\, d^2x = 4 \int_{(0,1]\times[-1,1]} u^2 + v^2\, d(u,v)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 4 \int_0^1 du \int_{-1}^1 dv\, (u^2 + v^2) = 4(\tfrac{1}{3} \cdot 2 + 1 \cdot \tfrac{2}{3}) = \frac{16}{3}\,.$$

*(evtl. Anmerkung über ausschöpfende Folge $A_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [-1,1]$)*