II. Integralsätze der Vektoranalysis

Def.: Eine kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ hat **glatten Rand**, wenn es für jedes $a \in \partial A$ eine offene Umgebung U und $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, so dass

(i) $A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) \leq 0 \}$,

(ii) $\nabla \alpha(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

Bsp.: Die Vollkugel $A := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq R \}$ hat glatten Rand. Wir können $\alpha(x) := \|x\|_2^2 - R^2$ wählen.

Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Dann gilt:

1) ∂A ist eine $(n-1)$-dim. UMF von $\mathbb{R}^n$ (d.h. eine „Hyperfläche")

2) lokal kann ∂A (bis auf Permutation der Koordinaten) als Graph einer Funktion $f \in C^1(V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ dargestellt werden.

3) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Vektorfeld $v \in C(\partial A, S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n)$, das sog. **äußere Normalenfeld**, für das gilt:

(i) $\forall a \in \partial A: \ v(a) \in \operatorname{span}\{ \nabla \alpha(a) \}$

(ii) $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta \in (0, \varepsilon): \ a + \delta v(a) \notin A$

(iii) Ist $\partial A \cap U = \{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \cap U \mid x_n = f(x') \}$, dann gilt

$$v(x', x_n) = \frac{(-\nabla f(x'), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|_2^2}} \qquad \forall (x', x_n) \in \partial A \cap U.$$

Beweis: 2) gilt für alle UMFs von $\mathbb{R}^n$ und folgt somit aus 1).

1) Da A glatten Rand hat, gibt es ein $\alpha \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit
$A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) \leq 0 \} \ \wedge \ \forall x \in U: \alpha'(x) \neq 0$.

Man vergewissert sich zunächst, dass $\partial A \cap U = \{ x \in U \mid \alpha(x) = 0 \}$.

N.R.: "$\subseteq$" Ist $x \in U$ mit $\alpha(x) < 0$, dann gilt dies auch in einer kleinen offenen Umgebung von x. Also ist $x \notin \partial A$.

"$\supseteq$" Sei $x \in U$ mit $\alpha(x) = 0$, $\nabla\alpha(x) \neq 0$.

$$t \mapsto \alpha(x + t\nabla\alpha(x)) = \underbrace{\alpha(x)}_{=0} + t\,\|\nabla\alpha(x)\|^2 + o(t)$$

wechselt bei $t=0$ das Vorzeichen. Damit enthält jede Umgebung von x Punkte innerhalb & außerhalb von A. Also $x \in \partial A$.

Da ∂A lokal Nullstellenmenge einer regulären (d.h. $\nabla\alpha \neq 0$) C^1-Funktion ist, ist ∂A eine C^1-UMF von $\mathbb{R}^n$ (s. Satz 16.3. aus Analysis 2).

3) $\nu(a) := \dfrac{\nabla\alpha(a)}{\|\nabla\alpha(a)\|}$ erfüllt $\nu \in C(\partial A, S^{n-1})$ und

(i) gilt per Konstruktion

(ii) $\alpha(a + \delta\nu(a)) = \alpha(a) + \delta\,\|\nabla\alpha(a)\| + o(\delta) > 0$

für hinreichend kleines δ.

(iii) Wähle $\alpha(x', x_n) := x_n - f(x')$ bei $a = (x', x_n) \in \partial A$.

Dann ist $\nabla\alpha(a) = (-\nabla f(x'), 1)$

$\square$

Bem.:
- Es gilt $\nu(a) \perp T_a\partial A \quad \forall a \in \partial A$.
- Ein stetiges Normalenfeld $\nu \in C(M \subseteq \mathbb{R}^n, S^{n-1})$ mit $\nu(a) \perp T_a M$ existiert nicht für jede $n-1$-dim. UMF von $\mathbb{R}^n$. Bsp.: Möbiusband.

Gauß'scher Integralsatz für Quader:

Betrachte $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$.

$Q =: Q' \times [a_n, b_n]$ mit $Q' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

und ein Vektorfeld $F \in C^1(U \supseteq Q, \mathbb{R}^n)$.

Dann gilt
$$\int_Q \partial_n F_n(x)\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{Q'} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_n} F(x', x_n)\, dx_n\, dx'$$

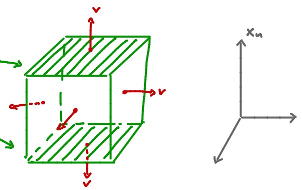
$$\underset{\text{HDI}}{=} \int_{Q'} \Big(F_n(x', b_n) - F_n(x', a_n) \Big) dx'$$

$$= \int_{\partial Q} F_n(x)\, \nu_n(x)\, dS(x) \qquad (*)$$

wobei $\int_{\partial Q} \dots$ als Summe aller $2n$ Quaderflächen zu verstehen ist &

$\nu : \partial Q \to \mathbb{R}^n$ das nach außen gerichtete Normalenfeld ist, so dass

$$\nu_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in \partial Q' \times (a_n, b_n) \\ 1, & x \in Q' \times \{b_n\} \\ -1, & x \in Q' \times \{a_n\} \end{cases}$$



$(*)$ gilt analog für alle Komponenten, d.h. für $j = 1, \dots, n$:

$$\int_Q \partial_j F_j(x)\, dx = \int_{\partial Q} F_j(x)\, \nu_j(x)\, dS(x)$$

und nach Summation über j:

$$\boxed{\int_Q \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial Q} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, dS(x)}$$