Satz: Sei $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ eine orthonormale Familie von Elementen eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ und $S := \mathrm{span}(\Psi)$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad P_S f = \sum_{i=1}^{n} \langle \psi_i, f\rangle \psi_i \\ &(ii) \quad \|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle \psi_i, f\rangle|^2 \end{aligned}}$$

„Bessel'sche Ungl."

Beweis: (i) Mit $f' := \sum_{i=1}^{n} \langle \psi_i, f\rangle \psi_i \in S$ gilt $\forall \psi_j \in \Psi$:

$$\langle \psi_j, f - f'\rangle = \langle \psi_j, f\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \psi_i, f\rangle \underbrace{\langle \psi_j, \psi_i\rangle}_{=\delta_{ij}} = 0 \text{. Also } f - f' \in S^\perp.$$

Damit ist $f = f' + (f - f')$ eine orthogonale Zerlegung bzgl. $\mathcal{H} = S \oplus S^\perp$.

Da diese eindeutig ist, gilt $f' = P_S f$.

(ii) Folgt aus Pythagoras: $\|f\|^2 = \|P_S f\|^2 + \|P_{S^\perp} f\|^2 \geq \|P_S f\|^2$.

$\square$

Satz: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\Psi := \{\psi_\alpha \in \mathcal{H}\}_{\alpha \in A}$ mit $A \subseteq \mathbb{N}$ orthonormal.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\boxed{\begin{aligned} &(i) \quad \Psi \text{ ist ONB} \\ &(ii) \quad \Psi^\perp = \{0\} \\ &(iii) \quad \mathcal{H} = \overline{\mathrm{span}\,\Psi} \\ &(iv) \quad \forall f \in \mathcal{H}.\ f = \sum_{\alpha \in A} \langle \psi_\alpha, f\rangle \psi_\alpha \\ &(v) \quad \forall f \in \mathcal{H}: \ \|f\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle f, \psi_\alpha\rangle|^2 \end{aligned}}$$

[wobei die rechte Seite in Norm konvergiert, unabh. von der Summationsreihenfolge.

„Parseval-Identität"

Beweis: Wir nehmen an, dass $A = \mathbb{N}$.

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$: Sei $f \in \Psi^\perp \setminus \{0\}$. Dann wäre $\langle \psi_\alpha, f\rangle = 0$ $\forall \alpha$ und wegen $f \neq 0$, Ψ keine ONB.

(Tatsächlich ist (i) $\Leftrightarrow$ (ii) per Definition einer ONB)

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\overline{\operatorname{span}(\Psi)} = (\Psi^\perp)^\perp \overset{(ii)}{=} \{0\}^\perp = \mathcal{H}$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $S_m := \operatorname{span}\{\psi_1, \dots \psi_m\}$, $P_m := P_{S_m}$. Nach Annahme gilt, dass für alle $f \in \mathcal{H}$ eine Folge $(f_n \in \operatorname{span}(\Psi))_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, mit $\| f_n - f \| \to 0$.

Sei $(m_n \in \mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, so dass $f_n \in S_{m_n}$.

Dann gilt: $0 \leq \| f - P_{m_n} f \| \leq \| f - f_n \| \to 0$.

Da $\| f - P_n f \|$ mit wachsendem n monoton abnimmt

gilt: $0 \leq \| f - \sum_{i=1}^n \langle \psi_i, f \rangle \psi_i \| = \| f - P_n f \| \to 0$.

$$\| f - P_n f \| = \| f - P_{n+1} P_n f \| \underset{\uparrow}{\geq} \| f - P_{n+1} f \|$$

$P_{n+1} f$ ist nächstes Element zu f in $P_{n+1}\mathcal{H}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Für $f_n := \sum_{i=1}^n \langle \psi_i, f \rangle \psi_i$ gilt: $\| f_n \|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, \psi_i \rangle|^2$. Da nach Annahme $f_n \to f$, gilt auch $\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, \psi_i \rangle|^2$.

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(v): Ist $f \in \Psi^\perp \setminus \{0\}$, dann gilt $\sum_i |\langle f, \psi_i \rangle|^2 = 0 \neq \|f\|^2$.

$\square$

Bem.: Dieser Satz gilt analog auch für nicht-separable Hilberträume.

Korollar: Ist $\{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine ONB eines Hilbertraums, dann gilt für alle $f, \tilde{f} \in \mathcal{H}$:

$$\boxed{\langle f, \tilde{f} \rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle f, \psi_i \rangle \langle \psi_i, \tilde{f} \rangle.}$$

„Parseval Gl.“

Beweis: $\langle f, \tilde{f} \rangle = \langle \sum_i \langle \psi_i, f \rangle \psi_i, \sum_j \langle \psi_j, \tilde{f} \rangle \psi_j \rangle \overset{\text{Stetigkeit des } \langle \cdot,\cdot \rangle}{=} \sum_{i,j} \langle f, \psi_i \rangle \langle \psi_j, \tilde{f} \rangle \underbrace{\langle \psi_i, \psi_j \rangle}_{= \delta_{ij}}$

$\square$

Bsp.:

- Für $L^2([0,2\pi])$ ist $\Psi := \{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \}_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ONB.

  Demnach gilt für jedes $f \in L^2([0,2\pi])$ mit

  $c_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$, dass

  $$\sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \to f \quad \text{für } N \to \infty.$$

  Die Konvergenz ist in L^2-Norm. Punktweise Konvergenz oder Konvergenz bzgl. anderer Normen gilt i.a. nicht.

- Für $L^2([0,2\pi] \times [0,\pi])$ bilden die Kugelflächenfunktionen Y_l^m mit $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \{-l, \dots, l\}$ eine ONB

Bem.: Vgl. zw. Parseval & Plancherel für $f, \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

Plancherel: $\langle f, \tilde{f} \rangle = \int \overline{\mathcal{F}(f)(k)}\, \mathcal{F}(\tilde{f})(k)\, dk$

$$\text{mit } \mathcal{F}(f)(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} f(x)\, dx$$

Parseval: $\langle f, \tilde{f} \rangle = \sum_\alpha \overline{\langle \psi_\alpha, f \rangle} \langle \psi_\alpha, \tilde{f} \rangle$

$$\text{mit } \langle \psi_\alpha, f \rangle = \int \overline{\psi_\alpha(x)}\, f(x)\, dx$$

D.h. „ebene Wellen" $x \mapsto (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{ik\cdot x}$ nehmen für Plancherel die Rolle der ONB ein. Allerdings sind diese nicht in L^2 !