<u>2. ⇒ 3.:</u> $\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle = \langle \sum_{j\in J}\langle\psi_j,\varphi_1\rangle\psi_j \,,\, \sum_{k\in J}\langle\psi_k,\varphi_2\rangle\psi_k\rangle$

Linearität & Stetigkeit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $= \sum_{j\in J}\sum_{k\in J} \overline{\langle\psi_j,\varphi_1\rangle}\langle\psi_k,\varphi_2\rangle \underbrace{\langle\psi_j,\psi_k\rangle}_{=\delta_{jk}}$

$= \sum_{j\in J}\langle\varphi_1,\psi_j\rangle\langle\psi_j,\varphi_2\rangle$.

<u>3 ⇒ 4.:</u> Setze $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$.

<u>4. ⇒ 5.:</u> Sei $\varphi\in\mathcal{H}$ mit $\langle\psi_j,\varphi\rangle = 0$ $\forall j\in J$. Dann

$\|\varphi\|^2 \underset{4.}{=} \sum_{j\in J}|\langle\psi_j,\varphi\rangle|^2 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

<u>5. ⇒ 1.:</u> Aus 5.: $\mathrm{Lin}(S)^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow \mathcal{H} = \{0\}^\perp = (\mathrm{Lin}(S)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Lin}(S)}$ vgl. S. 155. □

<u>Anwendung</u>: Konstruktion einer ONB in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mittels Gram-Schmidt aus Gaußschen Wellenpaketen

$$G_k(x) := \frac{1}{\pi^{\frac{n}{4}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2} + ik\cdot x\right), \quad k\in\mathbb{Q}^n$$

Mittels Gram-Schmidt läßt sich daraus eine orthonormierte Familie $(\tilde{G}_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ konstruieren.

Bleibt z.z. $\forall m \in \mathbb{N}: \langle \tilde{G}_{K_{\varphi(m)}}, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Beweis: Da $\tilde{G}_{K_m}$ endl. lin. Kombination von G_K's gilt

$$\forall k \in \mathbb{Q}^n: \quad 0 = \langle G_k, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1}{\pi^{\frac{n}{4}}} e^{-\frac{|x|^2}{2} - ik\cdot x} \varphi(x)\, dx$$

$$= \mathcal{F}(G_0 \varphi)(k).$$

Da $\mathbb{R}^n \ni k \mapsto \mathcal{F}(G_0\varphi)(k)$ stetig, folgt: $\mathcal{F}(G_0\varphi)(k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{R}^n$.

Aufgrund der Injektivität der L^2-Fouriertransformation folgt $G_0 \varphi = 0$ also $\varphi = 0$. □

Bemerkung zur strukturellen Ähnlichkeit von

1. Plancherel Identität: $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int \overline{(\mathcal{F}\varphi_1)(k)}\, (\mathcal{F}\varphi_2)(k)\, dk$

mit $(\mathcal{F}\varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-ik\cdot x} \varphi(x)\, dx$

2. Parsevalsche Identität: $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{j \in J} \langle \varphi_1, \psi_j \rangle \langle \psi_j, \varphi_2 \rangle$

mit $\langle \psi_j, \varphi \rangle = \int \overline{\psi_j(x)}\, \varphi(x)\, dx$

Die "ebenen Wellen" $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{ik\cdot x}$ spielen für Plancherel die Rolle der ONB. Aber: $e^{ik\cdot x} \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.

Trotzdem schreibt man in der QM für $\mathbb{1}$:

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int \langle \varphi_1 | k \rangle \langle k | \varphi_2 \rangle \, dk$$

mit $\langle k | \varphi_2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-ik\cdot x} \varphi(x) \, dx$.

29.3. Lineare Operatoren auf Hilberträumen

Def: Sei $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H}$ ein Untervektorraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$.

1. Ein (linearer) Operator A ist eine lineare Abb. $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(A), \lambda \in \mathbb{C}: \quad A(\psi + \lambda\varphi) = A\psi + \lambda A\varphi$$

$\mathcal{D}(A)$ heißt Definitionsbereich. Ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$, heißt A dicht definiert.

2. Ein Operator $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ heißt beschränkt, falls

$$\|A\| := \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{D}(A) \\ \|\psi\| = 1}} \|A\psi\| < \infty$$

Man nennt $\|A\|$ die Operatornorm von A

3. $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid \|A\| < \infty \}$ heißt der Raum der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$.

Bem: 1. In Physikbüchern wird oft auf die Angabe von $\mathcal{D}(A)$ verzichtet. Meist ist dann der maximale Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_{max}(A) := \{ \psi \in \mathcal{H} \mid A\psi \in \mathcal{H} \}$$

gemeint.

2. $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit Operatornorm $\|\cdot\|$ ist ein Banachraum, d.h. vollständiger, normierter Vektorraum.

Beispiele: 1. Für $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$ können alle Operatoren $A: \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ mit komplexwertigen $m \times m$ Matrizen indentifiziert werden (vgl. lineare Algebra). Es gilt $\|A\| = \left\{ \begin{array}{l} \text{größter Singulärwert} \\ \text{der Matrix} \end{array} \right.$.

2. Translationsoperator T_a mit $a \in \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$T_a: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \ (T_a\psi)(x) := \psi(x-a)$$

$$\|T_a\| = \sup_{\|\psi\|=1} \left(\int |\psi(x-a)|^2 dx \right)^{1/2} = \sup_{\|\psi\|=1} \|\psi\| = 1.$$

3. Fouriertrasformation $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ vgl. S.

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|\mathcal{F}\psi\| \underset{\text{Plancherel}}{\overset{\uparrow}{=}} \sup_{\|\psi\|=1} \|\psi\| = 1.$$

4. Multiplikationsoperator V zur Funktion $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$V: \mathcal{D}_{max}(V) \to L^2(\mathbb{R}^n), \ (V\psi)(x) = V(x)\psi(x)$$

mit $\mathcal{D}_{max}(V) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid x \mapsto V(x)\psi(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n)\}$

Ist $\|V\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |V(x)| < \infty$, dann ist der Multiplikationsoperator V ein beschränkter Operator, denn:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}_{max}(V): \quad \|V\psi\| = \left(\int |V(x)|^2 |\psi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \|V\|_\infty \|\psi\| .$$

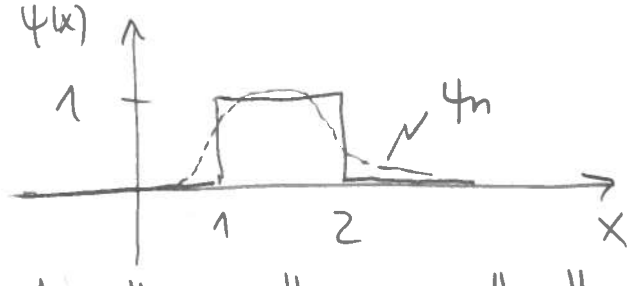
(Die obige Bedingung ist sogar äquiv. zur Beschränktheit)

5. Impulsoperator P auf $\mathcal{D}(P) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$

$$P: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (P\psi)(x) = -i \frac{d}{dx} \psi(x) .$$

Der Impulsoperator ist unbeschränkt. Man findet z.B. eine L^2-normierte Folge $(\psi_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, welche im L^2-Sinn gegen ein $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mit Unstetigkeitsstelle konvergiert:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P\psi_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int |\psi_n'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \infty$$



$$\lim_{n\to\infty} \|\psi - \psi_n\| = 0, \quad \|\psi_n\| = 1 .$$

$$\|\psi\| = \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 1 .$$

Satz: 1. Für (lin.) Operatoren $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ sind äquivalent:

i) A ist beschränkt

ii) A ist stetig

iii) A ist stetig bei Null, d.h.

$$\forall (\psi_n) \subset \mathcal{D}(A) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \|A\psi_n\| = 0.$$

2. Ist A dicht definiert und $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ beschränkt, dann besitzt A eine eindeutige, beschränkte Fortsetzung $\tilde{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Beweis: 1. Ringschluss: i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

i) $\Rightarrow$ ii): Für $(\psi_n), \psi \in \mathcal{D}(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$:

$$\|A\psi_n - A\psi\| = \|A(\psi_n - \psi)\| \leq \|A\| \, \|\psi_n - \psi\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ii) $\Rightarrow$ iii): trivial

iii) $\Rightarrow$ i): Annahme: A unbeschränkt.

Dann gibt es Folge $(\psi_n) \subset \mathcal{D}(A)$ mit $\|\psi_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \|A\psi_n\| = \infty$. Somit ist $\varphi_n := \frac{\psi_n}{\|A\psi_n\|} \in \mathcal{D}(A)$ Nullfolge mit $\|A\varphi_n\| = 1$. $\lightning$

2. Idee: Definiere $\tilde{A}\psi := \lim_{n\to\infty} A\psi_n$ für $(\psi_n) \in \mathcal{D}(A)$, $\psi \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$ □

29.4. Beschränkte lineare Operatoren

Sind $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann gilt:

i) $A + \lambda B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ (Vektorraum)

ii) $AB, BA \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und Einheitsoperator (Algebra)
$\mathbb{1}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\mathbb{1}\psi = \psi$ ist in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$)

Def Für $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt $[A,B] := AB - BA$ Kommutator.

Beispiele für $[A,B] \neq 0$:

1. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$: Paulische Spin Matrizen (in kan. Darstellung)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $[\sigma_k, \sigma_l] = i\, \varepsilon_{klm} \sigma_m$

2. Translation im Ortsraum $(T_a\psi)(x) = \psi(x-a)$ $a \in \mathbb{R}^n$
— Impulsraum $(S_b\psi)(x) = e^{ib\cdot x}\psi(x)$ $b \in \mathbb{R}^n$

$$[T_a, S_b]\psi(x) = e^{ib(x-a)}\psi(x-a) - e^{ibx}\psi(x-a)$$

$$= \left(e^{-ib\cdot a} - 1\right) e^{ib\cdot x}\psi(x-a)$$

Def: $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt inverser Operator zu $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ genau dann wenn $AB = BA = \mathbb{1}$.
Wir schreiben dann $A^{-1} = B$

Bem: 1. Für $\dim \mathcal{H} < \infty$: $AB = \mathbb{1} \iff BA = \mathbb{1}$.
Für $\dim \mathcal{H} = \infty$ gilt dies i.A. nicht mehr, z.B.
$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB in $\mathcal{H}$ $\quad A\varphi_n := \varphi_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$B\varphi_n := \begin{cases} \varphi_{n-1} & n \geq 2 \\ 0 & n = 1 \end{cases} \Rightarrow BA = \mathbb{1} \neq AB.$$

2. Falls die inversen Operatoren zu $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existieren gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Def: Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist der adjungierte Operator $A^+ : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (eindeutig) durch:

$$\langle A^+\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A\psi\rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$$

definiert.

Bem: 1. Die Eindeutigkeit kann gezeigt werden.
2. Rechenregeln: $(A + \lambda B)^+ = A^+ + \bar{\lambda} B^+$

$$(AB)^+ = B^+ A^+$$

Beispiele zur Berechnung des adjungierten Operators:

1. Translationsoperator T_a

subst $x' = x - a$

$$\langle \psi, T_a \varphi \rangle = \int \overline{\psi(x)}\, \varphi(x-a)\, dx \overset{\downarrow}{=} \int \overline{\psi(x+a)}\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \langle T_{-a} \psi, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \quad T_a^+ = T_{-a} = (T_a)^{-1}$$

2. Beschränkter Multiplikationsoperator V mit $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \psi, V\varphi \rangle = \int \overline{\psi(x)}\, V(x) \varphi(x)\, dx = \int \overline{\overline{V(x)}\psi(x)}\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \langle \overline{V}\psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad V^+ = \overline{V}$$

Ist $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann: $V^+ = V$!

3. Fouriertrafo $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \psi, \mathcal{F}\varphi \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\psi, \mathcal{F}\varphi \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle \mathcal{F}^{-1}\psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\mathcal{F}$ Bijektion, ie $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathbb{1}$ Plancherel

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^{-1}.$$

Lemma (Matrixelemente)

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(\varphi_j)_{j\in J}$, $J \subset \mathbb{N}$ eine ONB von $\mathcal{H}$.

Dann gilt $\forall \psi \in \mathcal{H}$:

$$A\psi = \sum_{n,m\in J} \varphi_n \langle \varphi_n, A\varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \psi \rangle$$

(Konvergenz der Reihe in $\mathcal{H}$!)

Bem: A ist somit durch Angabe der Matrixelemente $\langle \varphi_n, A\varphi_m \rangle$ eindeutig bestimmt!

Es gilt: $\langle \varphi_n, A^+\varphi_m \rangle = \overline{\langle A^+\varphi_m, \varphi_n \rangle} = \overline{\langle \varphi_m, A\varphi_n \rangle}$

Beweis: Für ONB gilt: i) $\psi = \sum_{m\in J} \varphi_m \langle \varphi_m, \psi \rangle$

ii) $A\varphi_m = \sum_{n\in J} \varphi_n \langle \varphi_n, A\varphi_m \rangle$

Da A stetig & linear ist folgt daraus für $J = \mathbb{N}$:

$$A\psi \overset{i)}{=} A\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} \varphi_m \langle \varphi_m, \psi \rangle\right) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{N\to\infty} A\left(\sum_{m=1}^{N} \varphi_m \langle \varphi_m, \psi \rangle\right)$$

$$\overset{\text{Linearität}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} A\varphi_m \langle \varphi_m, \psi \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} A\varphi_m \langle \varphi_m, \psi \rangle$$

$$\overset{ii)}{=} \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_n \langle \varphi_n, A\varphi_m \rangle \langle \varphi_m, \psi \rangle \qquad \square$$

Def. Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt

1. normal, wenn $[A^+, A] = 0$
2. selbstadjungiert, wenn $A^+ = A$
3. unitär, falls $A^+ = A^{-1}$
4. orthogonaler Projektor, falls $A^+ = A$ und $A^2 = A$

Lemma: Ist $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitär, dann gilt:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}: \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \langle U\varphi, U\psi \rangle$$

Insbesondere: $\|\psi\| = \|U\psi\|$ und somit $\|U\| = 1$.

Beweis: $\langle U\varphi, U\psi \rangle = \langle U^+ U \varphi, \psi \rangle \underset{U^+ = U^{-1}}{=} \langle \varphi, \psi \rangle$ $\square$

Beispiele unitärer Operatoren:

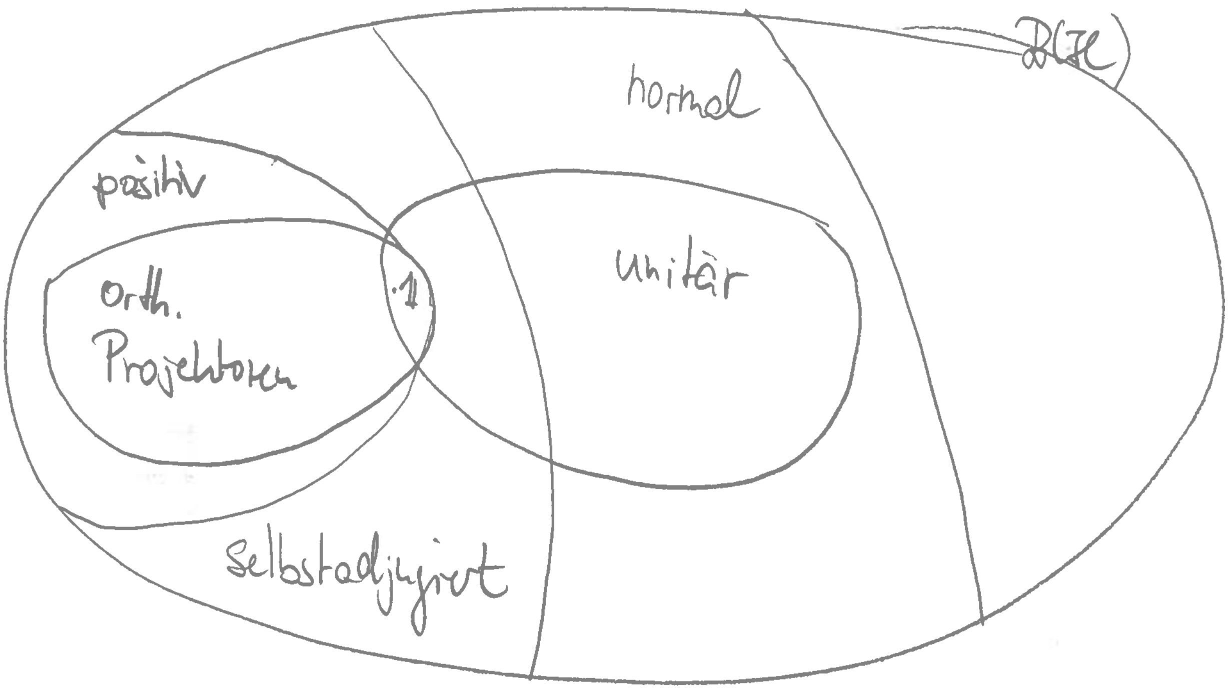
1. Translationsoperatoren T_a, $S_b : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$
2. Fouriertrafo $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$
3. Quantenmechanische Zeitentwicklung $U_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$.

Lemma: Ist $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, dann $\forall \psi \in \mathcal{H}: \langle \psi, A\psi \rangle \in \mathbb{R}$

Beweis: $\overline{\langle \psi, A\psi \rangle} = \langle A\psi, \psi \rangle = \langle \psi, A^+\psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle$ $\square$

Def.: Ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt positiv, genau dann wenn $\forall \psi \in \mathcal{H}: \langle \psi, A\psi \rangle \geq 0$.

Klassifikation von Operatoren in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$



29.4. Ausblick in die Spektraltheorie

Verallgemeinerung des Spektralsatzes aus der linearen Algebra, d.h. jede selbstadjungierte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m, \mathbb{C})$ ist von der Form

$$A = \sum_{j=1}^{m} a_j P_{\psi_j}$$

wobei $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m$ Eigenwerte von A

und $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ ONB zugehöriger Eigenvektoren,

$$P_{\psi_j} \varphi := \psi_j \langle \psi_j, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathbb{C}^m$$

eindimensionaler Projektor auf ψ_j, $j = 1 \dots m$.

<u>Def</u> (Spektralmaß) Sei $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ die Menge orthog. Projektoren auf einen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Eine Abb.

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$$

↑ Borelmengen auf $\mathbb{R}$

heißt Spektralmaß (od.: Projektionswertiges Maß), falls

1. $E(\mathbb{R}) = \mathbb{1}$
2. Für paarweise disjunkte $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$:

$$E\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} E(A_j)$$

<u>Beispiel:</u> (vgl. oben)

$$E(A) = \sum_{j:\, a_j \in A} P_{\psi_j} \quad \text{ist Spektralmaß.}$$

Bem: Für jedes Spektralmaß E und $\psi \in \mathcal{H}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \langle \psi, E(A)\psi \rangle$ ein Maß im Sinne von Kap 27.

Satz (Spektralsatz) Für jeden selbstadjungierten Operator A existiert genau ein Spektralmaß E mit

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, E(d\lambda)$$

Der Spektralsatz ermöglicht die Definition beliebiger (beschränkter) Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eines selbstadj. Operators $A = \int \lambda \, E(d\lambda)$:

$$f(A) := \int f(\lambda) \, E(d\lambda)$$

Beispiel: Impulsoperator $(P\psi)(x) = -i \frac{d}{dx}\psi(x)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

- Spektralmaß von P im Fourierraum

$$(\mathcal{F} E(A)\psi)(k) = 1_A(k) \, (\mathcal{F}\psi)(k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$P = \int k \, E(dk)$$

Schreibweise in QM: $P = \int k \, |k\rangle\langle k| \, dk$

- Quantenmechanische freie Zeitentwicklung

$$e^{itP^2} = \int e^{itk^2} E(dk) = U(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Unitärer Operator $U(t)^+ = U(-t) = (U(t))^{-1}$.

QM freie Zeitentwicklung ist Beispiel einer Einparametergruppe $U(t), t \in \mathbb{R}$ unitärer Operatoren, die stark stetig ist:

1. Gruppeneigenschaft $U(0) = \mathbb{1}$
   $U(t+s) = U(t)U(s) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

2. starke Stetigkeit: $\mathbb{R} \ni t \mapsto U(t)\psi$ stetig $\forall \psi \in \mathcal{H}$.

Unitarität garantiert: $\|U(t)\psi\| = \|\psi\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

d.h. reine Zustände in QM werden unter der Dynamik auf reine Zustände abgebildet.

Für QM von Interesse:

Satz (Stonesches Theorem)

Sei $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ eine stark stetige Einparametergruppe unitärer Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau einen selbstadjungierten Operator $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ mit $U(t) = e^{-itA}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bem: Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t)\psi = A\, U(t)\psi \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(A).$$