Vorbemerkung zur Fouriertrafo auf $L^2(\mathbb{R}^n)$:

1. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt gilt

$$\| f 1_\Lambda \|_1 \underset{\text{Hölder}}{\overset{\uparrow}{\leq}} \| f \|_2 \, \| 1_\Lambda \|_2 = \| f \|_2 \left(\int_\Lambda dx \right)^{1/2} < \infty$$

2. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist in $L^2(\mathbb{R})$, aber nicht in $L^1(\mathbb{R})$.

Somit ist das Fourierintegral $\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-ik\cdot x} f(x) \, dx$ nicht für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert!

Abhilfe schafft Approximation von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, z.B. durch $f 1_{B_n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oder durch Schwartz-Funktionen (f_n):

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_2 = 0 \qquad \text{(vgl. Lemma S. 140)}$$

Dann ist $\hat{f}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\| \hat{f}_n - \hat{f}_m \|_2 \underset{\text{Plancherel}}{\overset{\uparrow}{=}} \| f_n - f_m \|_2 \quad \text{d.h. } (\hat{f}_n) \text{ Cauchy-Folge in } L^2$$

Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ vollständig, konvergiert $(\hat{f}_n)$ in L^2 gegen $\hat{f} \in L^2$.

Dies definiert die L^2-Fouriertransformation.

Satz (Fouriertransformation auf L^2)
Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ läßt sich eindeutig von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen, so daß die resultierende Abbildung $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ linear, stetig und unitär mit $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

("Plancharel Identität")

Bemerkungen: 1. Stetigkeit bedeutet:

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{F}f - \mathcal{F}f_n \|_2 = 0$$

2. Unitarität von $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ bedeutet

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* \quad \text{und} \quad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$$

wobei $(\mathcal{F}^* f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik\cdot x} f(k)\, dk$ die Adjungierte Abbildung zu $\mathcal{F}$. (vgl. Kap 29)

28.5. Ausblick: Delta- & andere Distributionen

Distributionen f sind verallgemeinerte Funktionen, denen man nur zusammen mit Testfunktionen φ (im "Integral $\int f(x)\varphi(x)\,dx^n$") einen Sinn geben kann. Eine mögliche Wahl der Menge der Testfunktionen ist der Schwartz Raum.

Def. Eine (temperierte) Distribution f ist eine stetige, lineare Abbildung: $f: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$

$$\varphi \to (f, \varphi)$$

Bem. & Ergänzung:

1. Linearität bedeutet: $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C}$:

$$(f, \varphi + \lambda\psi) = (f, \varphi) + \lambda\,(f, \psi)$$

2. Stetigkeit bedeutet: $(\varphi_m), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n: \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \left| t^\alpha \partial^\beta (\varphi_m(t) - \varphi(t)) \right| = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} |(f, \varphi_m) - (f, \varphi)| = 0 .$$

(Auf diese Eigenschaft werden wir im Folgenden nicht mehr eingehen)

3. Jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ läßt sich mittels

$$\boxed{(f,\varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx} \quad (*)$$

mit einer Distribution identifizieren. Man verwendet die (symbolische) Integralschreibweise $(*)$ oft auch für andere Distributionen.

<u>Def:</u> $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, $(\delta,\varphi) := \int \delta(x)\,\varphi(x)\,dx := \varphi(0)$ heißt Delta-Distribution bei $0 \in \mathbb{R}^n$.

<u>Bemerkung und Ergänzung:</u>

Die Delta-Distribution ist Grenzwert von Dirac Folgen (δ_m), d.h.

$$\lim_{m\to\infty} \int \delta_m(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Allgemeiner läßt sich zeigen, daß jede Distribution f durch eine Folge $(f_m) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ approximiert werden kann, d.h.

$$\lim_{m\to\infty} (f_m,\varphi) = (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Man nennt dann (f_m) konvergent gegen f.

Weitere Beispiele sind Ableitung bzw. Fouriertrafo.

Def Für jede Distribution f und Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definiert man die *Ableitung* $\partial^\alpha f$ durch

$$(\partial^\alpha f, \varphi) := (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Spezialfall $n=1$: $\quad m \in \mathbb{N}$

$$\int \left(\frac{d^m}{dx^m} f\right)(x)\, \varphi(x)\, dx = (-1)^m \int f(x) \left(\frac{d^m}{dx^m}\varphi\right)(x)\, dx$$

Definition ist konsistent mit partieller Integration!

Beispiel. Heaviside Fkt $\Theta(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Distributionsidentität: $\quad \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int \left(\frac{d}{dx}\Theta\right)(x)\, \varphi(x)\, dx \overset{\text{Def.}}{=} -\int \Theta(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty$$

$$= \varphi(0) \underset{\text{Def}}{=} \int \delta(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \square$$

$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$

Für $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int \hat{f}(k)\,\varphi(k)\,dk = \langle \overline{\varphi}, \mathcal{F}f \rangle = \langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}, \mathcal{F}f \rangle$$

$$\underset{\text{Plancherel}}{=} \langle \mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}, f \rangle = \int \hat{\varphi}(x)\, f(x)\, dx$$

$$\overline{\mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}(x)} = \overline{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik\cdot x}\, \overline{\varphi}(k)\, dk} = \hat{\varphi}(x).$$

Dies motiviert:

Def: Für jede Distribution f definiert man die ~Fouriertransformierte~ *Fouriertransformierte* $\hat{f}$ als Distribution durch

$$(\hat{f}, \varphi) := (f, \hat{\varphi}) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Beispiele 1. Distributionsidentität $\boxed{\hat{\delta}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}}$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$(\hat{\delta}, \varphi) \underset{\text{Def}}{=} (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x)\, dx .$$

2. Fouriertrafo von δ' in $\mathbb{R}$: $\boxed{\widehat{\delta'}(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}}$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$: $(\widehat{\delta'}, \varphi) = (\delta', \hat{\varphi}) = -(\delta, \hat{\varphi}') = -\hat{\varphi}'(0)$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int x\, \varphi(x)\, dx . \qquad \square$$

29. Hilberträume & Grundzüge der mathematischen QM

Lernziele: Hilbertraum, Orthonormalbasen, abgeschlossene Unterräume
Lineare Operatoren auf Hilberträumen: adjungierter Operator, orth. Projektion, unitäre Operatoren, selbstadjungierte Operatoren
Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren.

Lit: · Kerner, von Wahl: Mathematik für Physiker, Springer 2006 Kap 15
· J. Weidmann: Linear Operators in Hilbert spaces Springer 198[illegible]

29.1. Hilberträume

Zur Erinnerung aus Lin. Algebra:

Def: Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$) ist eine Abb. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ für die gilt: $\forall\, \varphi,\psi\in\mathcal{H}$

i) $\langle\varphi,\varphi\rangle\geq 0$ und $\langle\varphi,\varphi\rangle=0 \Leftrightarrow \varphi=0$

ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$: $\langle\psi,\varphi_1+\lambda\varphi_2\rangle=\langle\psi,\varphi_1\rangle+\lambda\langle\psi,\varphi_2\rangle$

iii) $\langle\varphi,\psi\rangle=\overline{\langle\psi,\varphi\rangle}$

Das Tupel $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Prähilbertraum.

Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Für jeden Prähilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$

$$(*) \quad |\langle\varphi,\psi\rangle| \leq \|\varphi\| \, \|\psi\|$$

wobei $\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle}$ die auf $\mathcal{H}$ durch das Skalarprodukt induzierte *Norm* bezeichnet.

Insbesondere gilt: $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}$

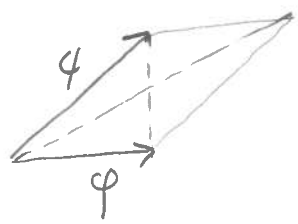
i) $\|\psi\| \geq 0$ und $\|\psi\| = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $\|\lambda\psi\| = |\lambda| \, \|\psi\|$

iii) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$ (*Δ-Ungleichung*)

iv) $\|\varphi+\psi\|^2 + \|\varphi-\psi\|^2 = 2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2$

(*Parallelogrammgleichung*)



Beweis: Übung.

2. Für Prähilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $\varphi \in \mathcal{H}$ sind die folgenden Abbildungen gleichmäßig stetig.

i) $\psi \mapsto \langle\varphi,\psi\rangle$ ii) $\psi \mapsto \langle\psi,\varphi\rangle$

iii) $\psi \mapsto \|\psi\|$

Beweis: i) & ii): Für $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$:

CS Ungleichung

$$|\langle\varphi,\psi_1\rangle - \langle\varphi,\psi_2\rangle| = |\langle\varphi,\psi_1-\psi_2\rangle| \le \|\varphi\|\,\|\psi_1-\psi_2\|, \text{ d.h.}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \quad \|\psi_1-\psi_2\|<\delta \Rightarrow |\langle\varphi,\psi_1\rangle - \langle\varphi,\psi_2\rangle| < \varepsilon.$$

ii) Analog mit Hilfe Δ-Ungleichung: $\big|\|\psi_1\|-\|\psi_2\|\big| \le \|\psi_1-\psi_2\|$

Def. Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist Prähilbertraum, der (als metrischer Raum mit Norm $\|\cdot\|$) vollständig ist (d.h. alle Cauchy Folgen konvergieren).
Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ heißt $\mathcal{H}$ komplex; für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ heißt $\mathcal{H}$ reell

---

Beispiele von Hilberträumen: (alle komplex)

1. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ mit $\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_j}\,\psi_j$

2. $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N}) = \{\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j|^2 < \infty\}$

   mit $\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\varphi_j}\,\psi_j$

3. $\mathcal{H} = L^2(\Omega) = \{\psi:\Omega\to\mathbb{C} \mid \int |\psi(x)|^2 \mu(dx) < \infty\}$

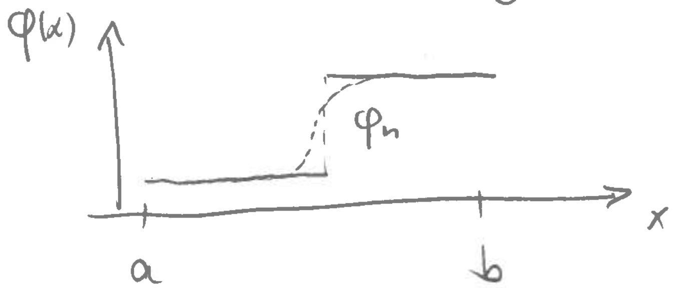
   Maß auf Ω

   mit $\langle\varphi,\psi\rangle = \int \overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,\mu(dx)$.

Prähilbertraum, der kein Hilbertraum ist, z.B.

$$\mathcal{M} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}) \text{ mit } \langle\varphi, \psi\rangle = \int_a^b \overline{\varphi(x)}\,\psi(x)\,dx$$

Fehlende Vollständigkeit: $\exists\, (\varphi_n) \subset \mathcal{M},\ \varphi \in L^2([a,b]) \setminus \mathcal{M}$ mit



$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$$

Bem.: Obiges Bsp zeigt für $\mathcal{M} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}) \subset L^2([a,b]) = \mathcal{H}$:

Ist $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ein Untervektorraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann ist $\mathcal{M}$ nicht notwendig abgeschlossen !!!

(Wichtiger Unterschied zu $\mathbb{C}^n$!)

Def: Für eine Teilmenge $S \subset \mathcal{H}$ eines Vektorraums $\mathcal{H}$ heißt $\mathrm{Lin}(S) := \{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_j \mid \lambda_j \in \mathbb{K}, \psi_j \in S, n \in \mathbb{N} \}$ die lineare Hülle von S (= kleinster UnterVR der S enthält)

Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ eines normierten Vektorraums $\mathcal{H}$ ist

$$\overline{\mathcal{M}} = \{ \varphi \in \mathcal{H} \mid \exists\, (\varphi_n) \subset \mathcal{M} : \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0 \}$$

der Abschluß von $\mathcal{M}$.

28.2. Orthogonormalbasen

<u>Def.</u> Für Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert man:

1. $\varphi \perp \psi \iff \langle \varphi, \psi \rangle = 0$ Orthogonalität von $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$
2. $M^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} \mid \forall \varphi \in M: \varphi \perp \psi\}$ Orthogonalkomplement von $M \subset \mathcal{H}$

<u>Satz:</u> Ist $M \subset \mathcal{H}$ ein Untervektorraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, dann ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$

<u>Bem:</u> Somit ist $M^\perp$ selbst ein Hilbertraum.
Es gilt stets: $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

<u>Beweis:</u> $M^\perp$ ist UntVR, da mit $\varphi, \psi \in M^\perp$, $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\varphi + \lambda \psi \in M^\perp$. Für $\varphi \in M$ und $f(\psi) := \langle \varphi, \psi \rangle$ gilt:

$$\varphi^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} \mid f(\psi) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

Da f stetig (vgl. S. 152) und $\{0\} \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen ist, ist auch das Urbild $\varphi^\perp$ abgeschlossen.

Somit ist auch $M^\perp = \bigcap_{\varphi \in M} \varphi^\perp$ abgeschlossen. $\square$

Def: Eine Familie $(\psi_j)_{j\in J} \subset \mathcal{H}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit (nicht notw. abzählbarer) Indexmenge J heißt *orthonormal*, falls $\forall_{j,k\in J}: \langle \psi_j, \psi_k \rangle = \delta_{jk}$

Eine *orthonormale Basis* (ONB) von $\mathcal{H}$ ist eine orthonormale Familie $S := (\psi_j)_{j\in J}$ mit $\overline{\mathrm{Lin}(S)} = \mathcal{H}$.

Die *Dimension* eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ist die Kardinalität einer (und damit jeder) ONB.

Ein Hilbertraum heißt *separabel*, wenn er eine höchstens abzählbare ONB besitzt.

Bspe 1. $\mathbb{C}^n$ und $\ell^2(\mathbb{N})$ sind separable HR. ONB ist

z.B. $\psi_1 = (1,0,0,\dots)$ $\psi_2 = (0,1,0,\dots)$, ...

2. $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ebenfalls separabel. (Konstruktion: später!)

Satz (Charakterisierung von ONBs)

Für orthonormale Familien $S = \{\varphi_j\}_{j \in J}$ mit $J \subset \mathbb{N}$ sind äquivalent:

1. S ist ONB
2. $\forall \varphi \in \mathcal{H}: \quad \varphi = \sum_{j \in J} \langle \varphi_j, \varphi \rangle \varphi_j$ (Entwicklung in ONB)

   Für $J = \mathbb{N}$ Konvergenz der Reihe bzgl. $\|\cdot\|$ d.h.
   $$\lim_{n\to\infty} \Big\| \varphi - \sum_{j=1}^{n} \langle \varphi_j, \varphi \rangle \varphi_j \Big\| = 0 \,!$$
3. $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}: \quad \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{j \in J} \langle \varphi_1, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_2 \rangle$ (Parsevalsche Gleichung)
4. $\forall \varphi \in \mathcal{H}: \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle \varphi_j, \varphi \rangle|^2$ (Besselsche Gleichung)
5. $\big(\forall j \in \mathbb{N}: \ \langle \varphi_j, \varphi \rangle = 0 \big) \Rightarrow \varphi = 0$

Beweis (Ringschluss)

1. $\Rightarrow$ 2. Für $\varphi \in \mathcal{H}$ gibt es Folge $\varphi_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j$ mit
$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$$

Für $j \in J$ gilt damit

$$\big| \langle \varphi_j, \varphi \rangle - \lambda_j 1_{j \le n} \big| = \big| \langle \varphi_j, \varphi - \varphi_n \rangle \big| \le \|\varphi - \varphi_n\| \to 0$$

Also $\lambda_j = \langle \varphi_j, \varphi \rangle$ $\square$