Satz (Fouriertrafo der Faltung) Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{f*g}(k) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$$

Beweis:

$$\text{l.S.} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-ik\cdot x} \left(\int f(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int g(y) \underbrace{\left(\int e^{-ik\cdot x} f(x-y)\, dx \right)}_{= e^{-ik\cdot y} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(k)} dy = \text{r.S.} \quad \square$$

Anwendung: Glättung durch glatte Dirac Folgen

Def: Eine Folge $(\delta_m) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\delta_m \geq 0$, $\|\delta_m\|_1 = 1$ und $\lim_{m\to\infty} \int_{|x|<r} \delta_m(x)\, dx = 1$ für alle $r > 0$ heißt **Dirac Folge**.

Beispiele: Für Nullfolge (ε_m) mit $\varepsilon_m > 0$:

1. $\delta_m(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon_m}{x^2 + \varepsilon_m^2}$, $x \in \mathbb{R}$

2. $\delta_m(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon_m^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\varepsilon_m^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Satz: Sei (δ_j) Dirac Folge und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann

1. $\lim\limits_{j \to \infty} \| \delta_j * f - f \|_1 = 0$.

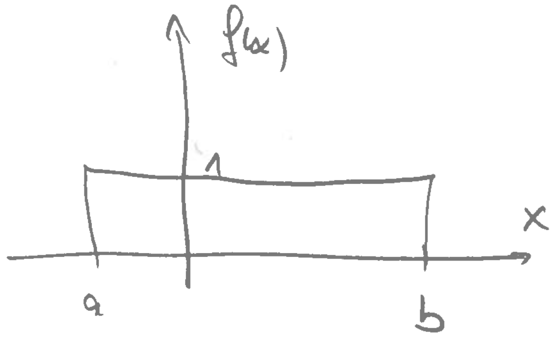
   Es gibt Teilfolge $(\delta_{j_m} * f)$, so daß für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

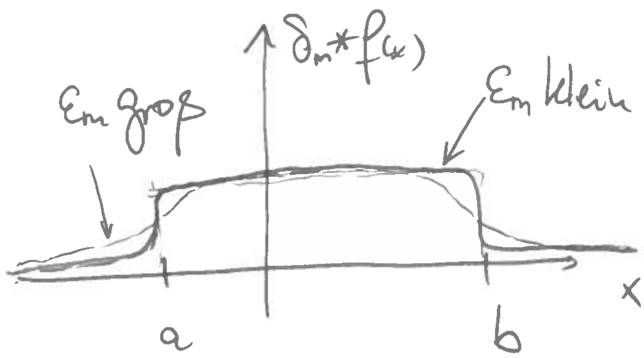
   $$\lim_{m \to \infty} (\delta_{j_m} * f)(x) = f(x)$$

2. Ist $\delta_j \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und sind die partiellen Ableitungen $\partial^\alpha \delta_j$, $|\alpha| \leq m$, beschränkt, dann $\delta_j * f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ und $\partial^\alpha (\delta_j * f) = (\partial^\alpha \delta_j) * f$

Beweis: Übung bzw. Strichatz □

Bsp (graphisch) $\quad \delta_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_m^2}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon_m^2}}$





28.3. Fourierinversion

Def: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt $\check{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ik\cdot x} f(k)\, dk$$

inverse Fouriertransformation von f.

Bsp: S.126 zeigt für $\hat{f}(k) = e^{-\frac{1}{2} k\cdot Ak}$:

$$(*) \quad \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ik\cdot x} e^{-\frac{1}{2}k\cdot Ak}\, dk \overset{\text{vgl. S.126}}{=} \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{2}x\cdot Ax} = f(x)$$

Allgemeiner gilt:

Satz Für $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\check{\hat{f}}(x) = f(x)$$

Beweisskizze:

1. Schritt: Inversionsformel für $\delta_j * f$ mit $\delta_j(x) = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{j^2|x|^2}{2}}$, $j \in \mathbb{N}$

- $\delta_j(x) \overset{(*)}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ik\cdot x} e^{-\frac{1}{2}j^2|k|^2}\, dk$, $\quad \hat{\delta}_j(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{j^2|k|^2}{2}}$

- $(\delta_j * f)(x) = \int \delta_j(x-y) f(y)\, dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left(\int e^{ik\cdot(x-y)} e^{-\frac{j^2 k^2}{2}}\, dk \right) f(y)\, dy$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left(\int e^{-ik\cdot y} f(y)\, dy \right) e^{ik\cdot x} e^{-\frac{j^2k^2}{2}}\, dk$$

$$= \int \hat{f}(k)\, \hat{\delta}_j(k)\, e^{ik\cdot x}\, dk =: \check{F}_j(x)$$

2. Schritt: Majorisierte Konvergenz $|\hat{\delta}_j(k)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$

$$\lim_{j\to\infty} \check{F}_j(x) \overset{\text{Majorisierte Konvergenz}}{=} \int \hat{f}(k)\, e^{ik\cdot x} \underbrace{\lim_{j\to\infty} e^{-\frac{j^2k^2}{2}}}_{=1} \frac{dk}{(2\pi)^{n/2}} = \check{\hat{f}}(x).$$

3. Schritt: Mit Satz S. 133 existiert Teilfolge $(\delta_{j_m} * f)$ so daß für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\lim_{m\to\infty} (\delta_{j_m} * f)(x) = f(x)$

□

Anwendung: Lösung inhomogener linearer DGL

$$(*) \quad \boxed{\ddot{x} - x = f} \qquad \text{mit } f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$$

Spezielle Lösung: $x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikt}\, \hat{x}_s(k)\, dk$ (Ansatz)

Fouriertrafo von (*): $-(k^2+1)\, \hat{x}_s(k) = \hat{f}(k)$

$$\Rightarrow \hat{x}_s(k) = -\frac{\hat{f}(k)}{1+k^2} =: \hat{g}(k)\, \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikt}\, \hat{g}(k) \hat{f}(k)\, dk = \frac{1}{2\pi} (f*g)(t)$$

Übung: $-g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikt} \frac{dk}{1+k^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|t|}$

Allgemeine Lösung $x(t) = \underbrace{c_+ e^{t} + c_- e^{-t}}_{\text{Allg. Lösung von } \ddot{x}-x=0} - \frac{1}{2} \int e^{-|t-s|} f(s)\, ds$

Anwendung: Lösung der Diffusionsgleichung

$$(*) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x,t) = D (\Delta \varrho)(x,t)} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Anfangsbedingung: $\varrho(x,0) = \varrho_0(x)$, $\varrho_0, \hat{\varrho}_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Diffusionskonstante: $D > 0$

Lösungsansatz: $\varrho(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik\cdot x} \hat{\varrho}(k,t)\, dk$

Fouriertrafo bzgl. x

Fouriertrafo von $(*)$: $\partial_t \hat{\varrho}(k,t) = -D|k|^2 \hat{\varrho}(k,t)$

Lösung mit $\hat{\varrho}(k,0) = \hat{\varrho}_0(k)$: $\hat{\varrho}(k,t) = e^{-tD|k|^2} \hat{\varrho}_0(k)$

Rücktrafo: $G(x,t) = \int e^{ik\cdot x} e^{-tDk^2} dk = \frac{1}{(4\pi D t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

$\Rightarrow \varrho(x,t) = \int G(x-y,t)\, \varrho_0(y)\, dy$.

Anwendung: Zentraler Grenzwertsatz

Def: $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\rho \geq 0$ und $\int \rho(x)\,dx = 1$ heißt Warscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$

- $m := \int x\,\rho(x)\,dx$ heißt Mittelwert
- $\sigma^2 := \int x^2 \rho(x)\,dx - m^2$ heißt Varianz

Bem: $\sigma^2 = \int (x-m)^2 \rho(x)\,dx \geq 0$

Def: Für eine Warscheinlichkeitsdichte $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ heißt

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad X(t) := \int e^{itx} \rho(x)\,dx$$

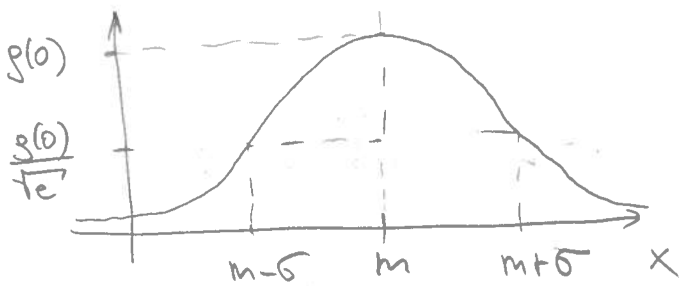
die zugehörige charakteische Funktion.

Bem: Es gilt: $X(0) = 1$. Falls $X \in L^1(\mathbb{R})$, charakteisiert X die Warscheinlichkeitsdichte eindeutig.

Bsp: Normalverteilung mit Mittelwert m und Variantz σ^2

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$X(t) = e^{itm}\, e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$



Satz Sei $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ charakteristische Funktion einer Warscheinlichkeitsdichte mit Mittelwert $m=0$ & Varianz σ^2.

Dann:
$$\lim_{n\to\infty} \chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis: Taylorentwicklung: $e^{i\zeta} = 1 + i\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \zeta^2 \theta(\zeta)$

wobei $\theta(\zeta) = \int_0^1 \int_0^1 s(e^{i\zeta st} - 1)\, ds\, dt$ stetig, beschränkt, $\theta(0) = 0$

Einsetzen:
$$\chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \int \left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}x - \frac{t^2x^2}{2n}\left(1 + 2\theta\left(\frac{tx}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \rho(x)\, dx$$
$$= 1 + \underbrace{i\frac{t}{\sqrt{n}}m}_{=0} - \frac{t^2}{2n}\sigma^2\left(1 + \vartheta_n(t)\right)$$

wobei $\vartheta_n(t) = 2\int x^2 \theta\left(\frac{tx}{\sqrt{n}}\right)\rho(x)\, dx$. Mit Satz zur majorisierten Konvergenz:
$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n(t) = 2\int x^2 \underbrace{\lim_{n\to\infty} \theta\left(\frac{tx}{\sqrt{n}}\right)}_{=\theta(0)=0} \rho(x)\, dx = 0.$$

Somit:
$$\lim_{n\to\infty} \chi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n}(1 + \vartheta_n(t))\right)^n \overset{\text{Analysis 1}}{=} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$
$\square$

Interpretation des Satzes:

Für eine Folge $(X_j)_{j=1,\dots,n}$ von unabhängigen, identisch (gemäß ϱ) verteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert m und Varianz σ^2 konvergiert die Verteilung von

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - m)$$

(in obigem Sinn) gegen die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz σ^2.

Bem: Normalität der Normalverteilung!

(vgl. Meßwertverteilung im Praktikum)

28.4 Schwartz-Raum und Fouriertransformation auf L^2

Def: Der Schwartz Raum (auch: Raum der schnell abfallenden Funktionen) ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : t \mapsto t^\alpha \partial^\beta f(t) \text{ ist beschränkt} \}$$

Bspe: 1. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger $\Rightarrow f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. Für jedes Polynom p in n Variablen definiert $f(x) = e^{-|x|^2} p(x)$ eine Fkt $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Elementare Eigenschaften: $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

1. $f + \lambda g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathcal{S}$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$)
2. $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
3. $t \mapsto t^\alpha f(t)$ und $t \mapsto \partial^\beta f(t)$ ist in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Lemma: 1. $\forall p \in [1, \infty)$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$

2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \in [1, \infty)$, d.h.

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \exists (f_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \lim_{n \to \infty} \| f - f_n \|_p = 0.$$

Beweis: 1. Sei $\chi(x) := \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\|f\|_p = \|f\chi + f(1-\chi)\|_p \le \|f\chi\|_p + \|f(1-\chi)\|_p$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_\infty \underbrace{\|\chi\|_p}_{<\infty} + \underbrace{\|f g\, g^{-1}(1-\chi)\|_p}_{} \qquad g(x) = |x|^{2n}$$

$$\le \|fg\|_\infty \underbrace{\|g^{-1}(1-\chi)\|_p}_{= \int_{|x|>1} |x|^{-2np}\, dx \,<\, \infty}$$

2. Idee: Approximiere f durch $f\chi_r$ mit $\chi_r(x) = \chi(\frac{x}{r})$ wobei $r>0$ und $f\chi_r \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ durch Faltung mit geeigneter Dirac Folge. □

Satz: 1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2. Die Restriktion der Fouriertransformation auf den Schwartz Raum $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist Automorphismus (d.h. bijektive Abb. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \circlearrowleft$)

3. Plancharel Identität für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

wobei $\langle f, g \rangle = \int \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$.

Bem: Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ wohldef., da $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$

Beweis: 1. Aus Satz S. 129/130:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n: \quad k^\alpha \partial^\beta \hat{f} = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \widehat{\partial^\alpha (\cdot)^\beta f}$$

Somit: i) Spezialfall $\alpha = 0$: $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$

ii) $k \mapsto k^\alpha \partial^\beta \hat{f}(k)$ ist beschränkt.

2. Folgt aus i) und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Lemma) und dem Umkehrsatz.

3. $$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \int \overline{\hat{f}(k)}\, \hat{g}(k)\, dk = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left(\int e^{+ik\cdot x}\, \overline{f(x)}\, dx \right) \hat{g}(k)\, dk$$

Fubini $f \in L^1$, $\hat{g} \in L^1$

$$= \int \overline{f(x)} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int e^{ik\cdot x}\, \hat{g}(k)\, dk}_{= g(x) \text{ Umkehrsatz!}}\, dx$$

$$= \langle f, g \rangle \quad \square$$

Anwendung: __Heisenbergsche Unschärferelation__ (Ort-Impuls)

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Satz:}} \text{ Für } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ mit } \|f\|_2 = 1 \text{ gilt:} \\ \left(\int x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int k^2 |\hat{f}(k)|^2 dx \right) \geq \frac{1}{4} \qquad (*) \end{array}}$$

Beweis: Z.z. ist $\|xf\|_2 \, \|k\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{2}$

Es gilt: $\|k\hat{f}\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.129}}}{=} \|\widehat{f'}\|_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Plancharel}}}{=} \|f'\|_2$

- Cauchy-Schwarz Ungl.: $|\langle xf, f'\rangle| \leq \|xf\|_2 \, \|f'\|_2 = \|xf\|_2 \, \|k\hat{f}\|_2$
- $\langle xf, f'\rangle = \int \overline{x\,f(x)}\, f'(x)\, dx = \underbrace{\left[x\,|f(x)|^2\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0,\ \text{da } f\in \mathcal{S}(\mathbb{R})} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\overline{f(x)} + x\,\overline{f'(x)}\right) f(x)\, dx$

$$= -1 - \langle f', xf\rangle$$
$$= -1 - \overline{\langle xf, f'\rangle}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\langle xf, f'\rangle = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\langle xf, f'\rangle| \geq \frac{1}{2}$. $\square$

Bem: 1. Gleichheit in (*) für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

2. Interpretation in QM:

$|f(x)|^2$ = Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte im Ortraum

$|\hat{f}(k)|$ = — im Impulsraum

o.B.d.A $\int x\,|f(x)|^2 dx = 0 = \int k\,|\hat{f}(k)|^2 dk$

(*) „Ortvarianz" × „Impulsvarianz" $\geq \frac{1}{4}$.