27. Grundzüge der Maß- & Integrationstheorie

Lernziele:
- Begriffe Maß & Integral
- Wichtigeste Sätze zum Lebesgue Integral: Majorisierte
- Konvergenz, Fubini, Trafosatz.
- L^p-Räume.

Lit.: · Kap 7 in: M. Brokate et al, Grundwissen Mathematik Springer 2011
· J. Elstrodt: Maß- & Integrationstheorie, Springer 2011

27.1. Lebesgue Maß

Motivation: Volumenbegriff für $A \subset \mathbb{R}^n$ nicht notwendig Jordan meßbar, z.B. Cantormenge.

Konstruktion nach Carathéodory:

Betrachte die dyadischen Elementarzellen im $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D} := \left\{ I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall j \in \{1,\ldots,n\}\ \exists m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} : I_j = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right] \right\}$$

Def. Für $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |D_i| \;\middle|\; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \wedge D_i \in \mathcal{D} \right\}$$

eine Abb. $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, die äußeres Lebesgue Maß heißt

Potenzmenge, d.h. Menge aller Teilmengen

Eigenschaften des äußeren Lebesgue Maß λ^*:

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \lambda^*(A) \subset \lambda^*(B)$ (Monotonie)
3. $\lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) \leq \bigcup_{i=1}^{\infty} \lambda^*(D_i)$ (Δ-Ungleichung)
4. $\underbrace{d(A,B)}_{\text{Eukl. Abstand zw. } A,B} > 0 \Rightarrow \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ (endl. Additivität)

Neben 1.-4. ist folgende Eigenschaft wünschenswert, aber nicht für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt (Banach-Tarksi-Paradox)

$$\boxed{(*) \quad \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n): \quad \lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A)}$$

Def: Eine Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ heißt lebesgue meßbar, wenn (*) gilt. Die Menge der lebesgue meßbaren Mengen

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist lebesgue meßbar}\}$$

heißt lebesguesche σ-Algebra. Die Restriktion

$$\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty], \quad A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

heißt lebesgue Maß von A.

Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Jede Jordan meßbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist lebesgue meßbar und es gilt: $|A| = \lambda(A)$.
   Die lebesguesche σ-Algebra enthält jedoch auch abzählbare Vereinigungen von Jordan meßbaren Mengen, wie etwa die Cantormenge.
   Banach-Tarski: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

2. Das lebesgue-Maß ist translationsinvariant, d.h.
   $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\lambda(A) = \lambda(A + x_0)$.

27.2. Allgemeine Maße & σ-Algebren

Die lebesgue σ-Algebra ist ein Beispiel zu

Def.: Für eine Menge Ω heißt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra, falls

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$

iii) $A_j \in \mathcal{A} \ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$.

Die Elemente in $\mathcal{A}$ heißen meßbare Mengen.

Bemerkungen: 1. Es gilt auch:

iv) $\emptyset \in \mathcal{A}$ (da $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$)

v) $A_j \in \mathcal{A}\ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ (da $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j^c\right)^c \in \mathcal{A}$)

2. Jede Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ läßt sich zu einer σ-Algebra ergänzen. Für einen topologischen Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ heißt die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen $\mathcal{O}$ enthält, die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$.

Man kann zeigen: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Das Lebesgue Maß $\lambda : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist ein Beispiel zu:

Def.: Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, dann heißt $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß, wenn gilt:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Für paarweise disjunkte $A_j \in \mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Ergänzungen:

1. Ein Maß heißt Warscheinlichkeitsmaß, wenn $\mu(\Omega) = 1$.
2. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ aus Menge, σ-Algebra und Maß heißt Maßraum.

Beispiele: 1. Diracsche W-Maß für $x_0 \in \Omega$:

$$\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\Omega) \to \{0,1\}, \quad \delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A. \end{cases}$$

2. Zählmaß auf Ω

$$\# : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty], \quad \#(A) := \begin{cases} \#\text{ Elemente von } A, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

27.3. Nullmengen und fast-überall bestehende Eigenschaften

Def: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

1. Ist $\mu(A) = 0$, dann heißt A Nullmenge (bzgl. μ)
2. Eine Eigenschaft P, welche Pkte in Ω haben (oder nicht), gilt fast überall, falls die Menge der Pkte in Ω, auf welchen P nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Spezialfall: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda$: Lebesgue-Nullmenge

Bemerkung: Man kann zeigen:

i) Teilmengen von Lebesgue Nullmengen sind Lebesgue Nullmengen (Vollständigkeit des Lebesgue Maß)

ii) N_j Nullmenge $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j$ Nullmenge.

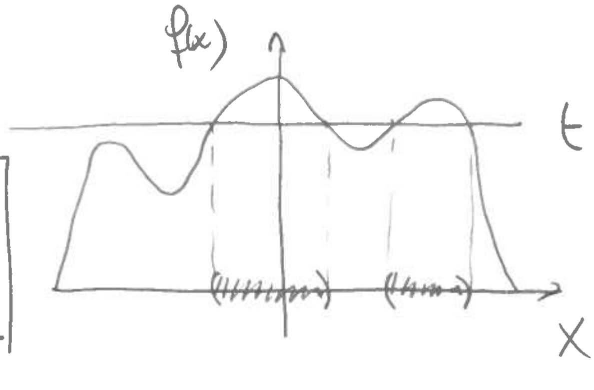
Beispiel: $N = \mathbb{Q}$ ist eine Lebesgue Nullmenge in $\mathbb{R}$.
Deshalb gilt: $\mathbb{1}_N(x) := \left\{\begin{matrix} 1 & x\in N \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix}\right\} = 0$ für fast-alle $x \in \mathbb{R}$.

27.4. Lebesgue Integral

Motivation der Konstruktion für $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$:

Betrachte Niveaumengen

$$\boxed{S_f(t) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > t \}}$$



Ist $S_f(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für alle $t \geq 0$, dann gilt:

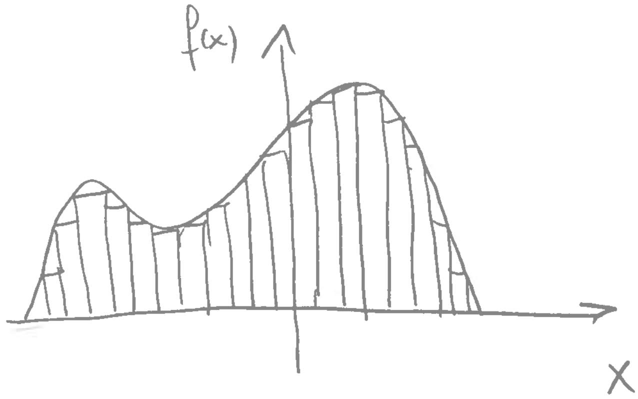
1. $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) := \lambda(S_f(t))$ ist nicht negativ und monoton steigend. Also ist das (uneigentl.) Riemann

Integral $\int_0^\infty \lambda(S_f(t))\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \lambda(S_f(t))\,dt$

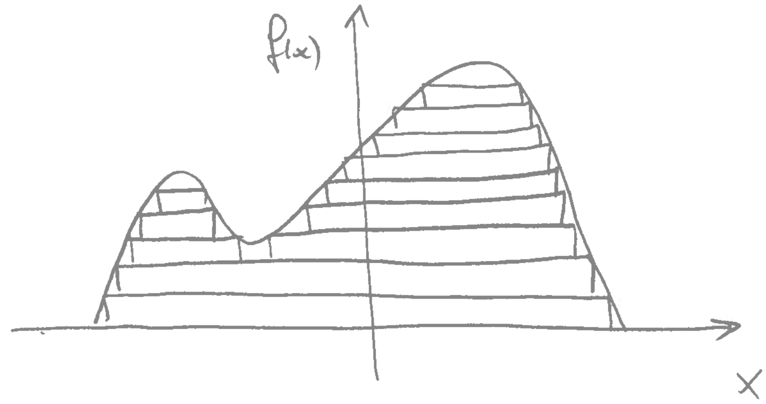
wohldefiniert; möglicherweise $+\infty$.

2. Für genügend glatte f's mit kompaktem Träger gilt

$$\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda(S_f(t))\,dt \qquad (*)$$



Integration à la Riemann
(l.S. von (*))



Integration à la Lebesgue
(r.S. von (*))

Dies motiviert die folgende Def im Spezialfall:

<u>Def.</u> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

1. Eine Fkt $f: \Omega \to \mathbb{R}$ heißt <u>meßbar</u> (bzgl. $\mathcal{A}$), wenn $S_f(t) = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}$ meßbar für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.

   Komplexwertige $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heißen meßbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ meßbar sind.

2. Für meßbare $f:\Omega\to[0,\infty)$ heißt

$$\boxed{\int f\,d\mu := \int_0^\infty \mu(S_f(t))\,dt}$$

(Lebesgue-) Integral. Ist $\int f\,d\mu<\infty$, dann heißt $f:\Omega\to[0,\infty)$ integrierbar.

Komplexwertige $f:\Omega\to\mathbb{C}$ heißen (Lebesgue-) integrierbar, wenn $(\mathrm{Re} f)_+, (\mathrm{Re} f)_-, (\mathrm{Im} f)_+, (\mathrm{Im} f)_-$ alle integrierbar, wobei für $g:\Omega\to\mathbb{R}$

$$g_+(x):=\max\{g(x),0\},\quad g_-(x):=-\min\{g(x),0\}$$

Positiv- bzw. Negativteil von g definiert.

Für integrierbare $f:\Omega\to\mathbb{C}$ heißt

$$\boxed{\begin{aligned}\int f\,d\mu := {}&\int(\mathrm{Re} f)_+\,d\mu-\int(\mathrm{Re} f)_-\,d\mu\\&+i\int(\mathrm{Im} f)_+\,d\mu-i\int(\mathrm{Im} f)_-\,d\mu\end{aligned}}$$

(Lebesgue-) Integral.

Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Ist $A \in \mathcal{A}$, dann gilt: $\mu(A) = \int \mathbb{1}_A \, d\mu$.

   Für $f : A \to \mathbb{C}$ setzt man: $\int_A f \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$,

   falls $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ integrierbar.

2. Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt:

   f integrierbar $\iff$ $|f|$ integrierbar

3. Im Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mu = \lambda$:

   i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist absolut Riemann integrierbar

   $\Longrightarrow$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist (lebesgue-) integrierbar.

   und Gleichheit der Integrale!

   ii) Schreibweise: $\int f(x) \, dx = \int f \, d\lambda$.

4. Für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

   i) $\alpha f + \beta g$ int.bar mit $\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$

   ii) $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$

   iii) $f = g$ fast überall $\Rightarrow$ $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

27.5. Zusammenfassung der wichtigsten Sätze zum Lebesgue Integral.

Im Folgenden: $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

Satz Sei $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, Folge integrierbarer Funktionen, die fast überall gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Falls es eine integrierbare Fkt $g : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$|f_n| \le g \quad \text{fast überall},$$

dann ist f integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Was kann schief laufen? z.B.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: i) $\int f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

<u>Anwendungsbeispiel:</u> (vgl. S. 96)

Die Funktionenfamilie: $h_r : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$h_r(t) := \frac{r|P(re^{i\pi t})|}{|Q(re^{i\pi t})|}, \quad r \in (0,\infty)$$

ist beschränkt, d.h. $\exists C < \infty : \forall r > 0, t \in [0,1]:$

$$|h_r(t)| \leq C.$$

Somit gilt für $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_r(t) := h_r(t) e^{-r\sin(\pi t)}$

i) $\lim\limits_{r \to \infty} f_r(t) = 0 \quad \forall t \in (0,1)$ ($\leftarrow$ fast alle $t \in [0,1]$)

ii) $|f_r(t)| \leq C \quad (= g(t))$

Majorisierte Konvergenz: $\lim\limits_{r \to \infty} \int_0^\infty f_r(t)\, dt = 0.$

<u>Satz</u> (Monotone Konvergenz)

Sind $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ meßbare Fkten $f_n : \Omega \to [0,\infty]$,

dann gilt: $\int \lim\limits_{n \to \infty} f_n \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$

Zur Berechnung von Integralen über $\mathbb{R}^n$ nützlich:

Satz (Fubini) Sei $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar.
Dann gilt: 1. $\mathbb{R}^m \ni x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ ist für fast alle $x_2 \in \mathbb{R}^n$ integrierbar

2. $x_2 \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, dx_1$ ist integrierbar

3. $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2$

Bem: Analog für $x_1 \leftrightarrow x_2$.

Satz (Transformationsformel) Sind $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: V \to \mathcal{U}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ meßbar.
Dann gilt: 1. f int.bar über $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ $x \mapsto f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)|$ int.bar über V.

2. $\int_{\mathcal{U}} f(y)\, dy = \int_V f(\varphi(x))\, |\det D\varphi(x)|\, dx$