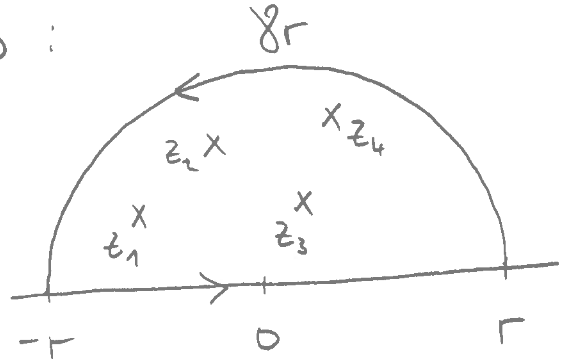
Berechnung bestimmter reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

Satz: Sei $U \supseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ offen und $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph wobei $\operatorname{Im} z_k > 0 \ \forall k$. Gilt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0: \ (|z| = r \wedge \operatorname{Im} z \geq 0 \Rightarrow r|f(z)| < \varepsilon)$, dann:

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(f)$$

Beweis: Wähle $r > 0$ hinreichend groß:

$$\gamma_r(t) = r e^{i\pi t}, \quad t \in [0,1]$$



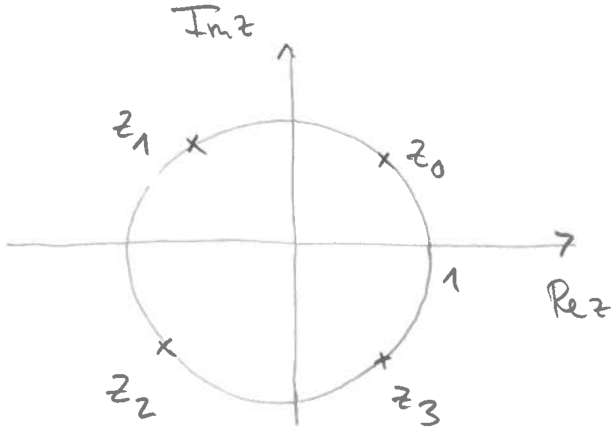
Aus Residuensatz:

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k}(f)$$

Abschätzung: $\left| \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \right| \leq \pi r \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)| \xrightarrow[\text{nach Voraussetzung.}]{r \to \infty} 0$

$\square$

<u>Beispiel:</u> $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ Pole in $\mathbb{C}$: $z^4 = -1$



- $z_k = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}$ $k = 0,1,2,3$

  einfache Pole

- $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \dfrac{1}{z_0 - z_1}\,\dfrac{1}{z_0 - z_2}\,\dfrac{1}{z_0 - z_3} = \dfrac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4}$

- $\operatorname{Res}_{z_1}(f) = \ldots = \dfrac{1}{4}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Somit: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \overset{\substack{\text{abs. Konvergenz} \\ \text{des Integrals}}}{=} \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

<u>Satz</u> (Fourierintegrale rationaler Funktionen)

Sind P und Q Polynome mit Grad $Q >$ Grad P und liegen die Nullstellen $\{z_1, \ldots, z_n\}$ von Q nicht auf der reellen Achse, dann gilt für $k > 0$:

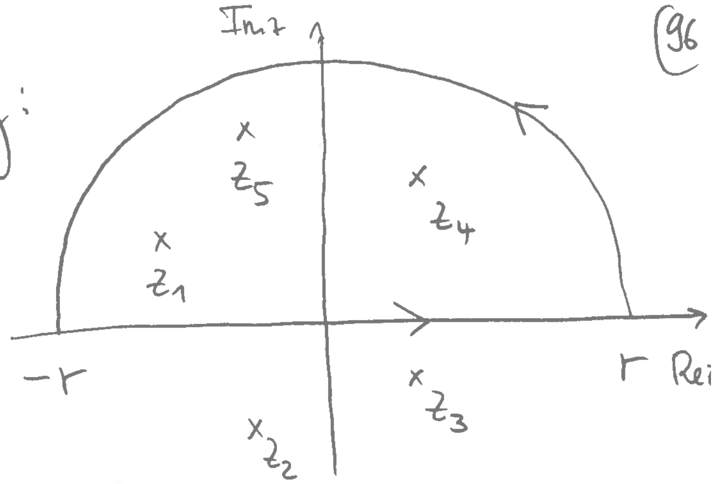
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{ikx}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{Res}_{z_j}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{ikz}\right)$$

<u>Bem:</u> Ist P, Q reell, dann gilt für $k \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{ikx}\, dx = \overline{\int_{-r}^{r} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{-ikx}\, dx}\,.$$

Beweis: Wähle $r>0$ groß genug:

$$\gamma_r(t) = r e^{i\pi t}, \quad t\in[0,1]$$



$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{ikz}\,dz\right| = \left|\int_0^1 \frac{P(re^{i\pi t})}{Q(re^{i\pi t})} e^{ikre^{i\pi t}}\, i\pi r e^{i\pi t}\,dt\right|$$

$e^{iz} = e^{i\operatorname{Re} z}\, e^{-\operatorname{Im} z}$, $\operatorname{Im}(kre^{i\pi t}) = kr\sin(\pi t) \ge 0$.

$$\le \pi \int_0^1 \underbrace{\frac{r\,|P(re^{i\pi t})|}{|Q(re^{i\pi t})|}}_{\text{beschränkt (wg Grad } P < \text{Grad } Q)}\ \underbrace{e^{-kr\sin(\pi t)}}_{\to 0 \text{ für } r\to\infty \text{ und } t\in(0,1)}\, dt \xrightarrow{\text{(majorisierte Konv. vgl Kap. 27)}} 0$$

Die Behauptung folgt somit aus Residuensatz □

Beispiel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx \underset{\substack{\text{Symmetrie}\\ \text{des Integranden}}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Res}_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

Pole 1. Ordnung bei $\pm i$

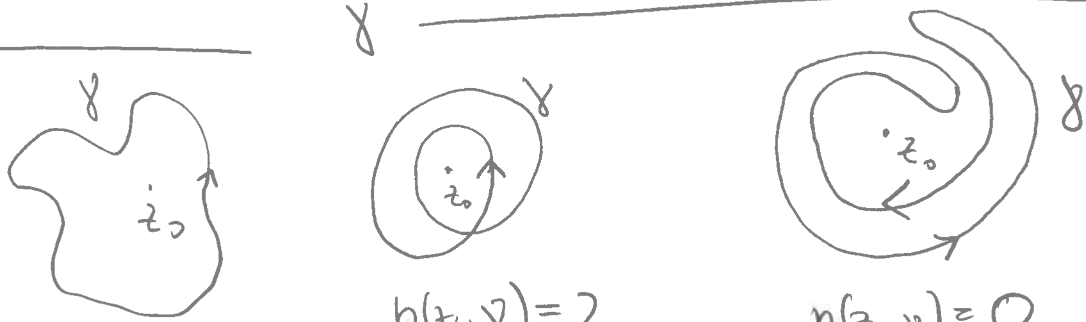
$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{1}{2ei}$$

Ausblick: Windungszahl & allg. Formulierung des Residuensatzes

Def: Für geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ und $z_0 \notin \operatorname{Spur} \gamma$ heißt

$$n(z_0, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz \quad \textit{Windungszahl}.$$

Bspe:



$n(z_0, \gamma) = 1$ $\qquad$ $n(z_0, \gamma) = 2$ $\qquad$ $n(z_0, \gamma) = 0$.

Satz (Residuensatz – allgemeine Form)

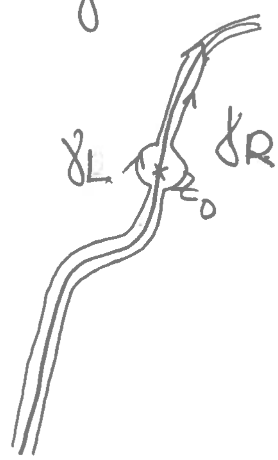
Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $S = \{z_1, \dots, z_n\}$ Menge paarweise disjunkter Punkte $z_j \in U$. Dann gilt für jede holomorphe Fkt $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ und geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to U \setminus S$, welche in U null-homotop ist:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} n(z_j, \gamma) \operatorname{Res}_{z_j}(f).$$

Beweis: K. Jänich.

26.6. Kramers - Kronig Relationen

Def: Ist $f: U\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \gamma((0,1))$ eine isolierte Singularität, die auf $\gamma : [0,1] \to U$ liegt.



Dann heißt:

i) $\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz := \int_{\gamma_L} f(z)\,dz$ Linkswert

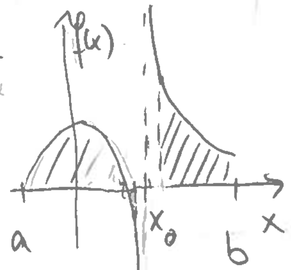
ii) $\mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ Rechtswert

iii) $\mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz + \mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz\right)$ Prinzipalwert

Aus dem Residuensatz folgt:

$$\mathcal{R}\int_\gamma f(z)\,dz - \mathcal{L}\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}(f) \,. \quad (*)$$

Def: Für $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $x_0 \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ heißt



$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

Cauchyscher Hauptwert, falls der Grenzwert existiert.

Beispiel: Für $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, d.h.
$\exists R>0 \ \forall |x|>R: \varphi(x)=0$ ist die Fkt $\psi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} & x \neq 0 \\ \varphi'(0) & x=0 \end{cases}$$

stetig und besitzt kompakten Träger. Es gilt

$$\boxed{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx} = \mathcal{P}\int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-R}^{R} \psi(x)\,dx$$

$$\boxed{= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx}$$

Beweis: $\text{l.S.} = \mathcal{P}\int_{-R}^{R}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(0)}{x}\right]dx$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\psi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{R}\psi(x)\,dx\right] + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi(0)\underbrace{\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{dx}{x}\right)}_{=0}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \int_{-R}^{R}\psi(x)\,dx \qquad \square$$

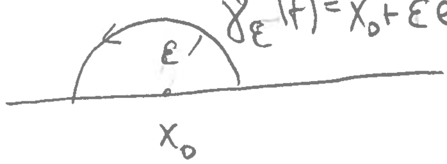
ψ stetig,
also Riemann int.bar
über $[-R,R]$.

Satz (Prinzipalwert = Cauchyscher Hauptwert)

Ist $x_0 \in (a,b) \subset U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einfachem Pol bei x_0. Dann gilt für $\gamma(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$:

$$\mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz = \mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx$$

Beweis: Da x_0 einfacher Pol, gibt es $g: U \to \mathbb{C}$ holomorph:

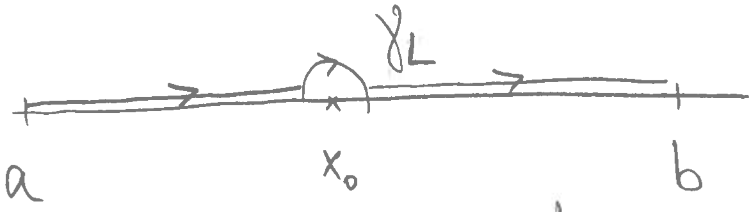


$f(z) = \dfrac{g(z)}{z - x_0}$. Für $\gamma_\varepsilon: [0,1] \to U$:

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0}\,dz}_{\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0}\ 0} + \underbrace{\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(x_0)}{z - x_0}\,dz}$$

$$= \int_0^1 \frac{g(x_0)}{r e^{i\pi t}}\, i r \pi e^{i\pi t}\,dt$$

$$= i\pi\, g(x_0) = i\pi \operatorname{Res}_{x_0}(f)$$



$$\int_{\gamma_L} f(z)\,dz = \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx - i\pi \operatorname{Res}_{x_0}(f)$$

$$(*) \Rightarrow \mathcal{P}\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_L} f(z)\,dz + i\pi \operatorname{Res}_{x_0}(f) = \mathcal{P}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \square$$

Satz (Kramers-Kronig Relationen)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $U \supset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ offen, und gelte:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 : \left(\operatorname{Im} z \geq 0 \wedge |z| > R \implies |f(z)| < \varepsilon \right)$$

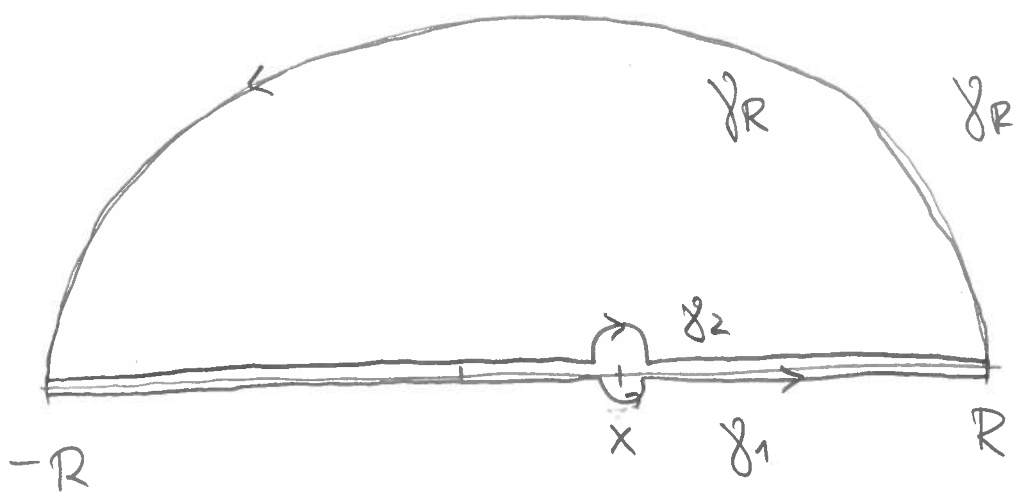
Dann gilt: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x')}{x' - x} \, dx' \\ \operatorname{Im} f(x) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(x')}{x' - x} \, dx' \end{aligned}} \qquad (*)$$

Beweis: $(*) \iff f(x) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} \, dx'$

Betrachte folgende Integrationswege: $R > 0$ genügend groß.

$\gamma_R(t) = R e^{i\pi t}, \; t \in [0,1]$



i) $$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \right| = \left| \int_0^1 \frac{f(Re^{i\pi t})}{Re^{i\pi t} - x} R i\pi \, dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\frac{R\pi}{|Re^{i\pi t} - x|}}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{für } R\to\infty}} \underbrace{|f(Re^{i\pi t})|}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} 0} \, dt \xrightarrow{R\to 0} 0 .$$

majorisierte Konvergenz vgl. Kap 27

ii) Residuensatz: $$\int_{\gamma_1+\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 2\pi i f(x) ,$$

$$\int_{\gamma_2+\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 0$$

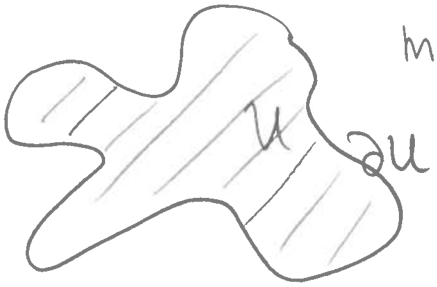
$$\Rightarrow \mathcal{P}\int_{-R}^{R} \frac{f(x')}{x'-x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-x}\, dz + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \right)$$

$$\underset{i+ii)}{=} \pi i f(x) . \qquad \square .$$

<u>Bemerkung</u>: Physikalische Anwendungen beruhen auf der Tatsache, daß Fouriertrafos von Antwortfunktionen die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllen (z.B. E-Dynamik Beziehung zwischen Brechungsindex & Absorptionskoeff.; vgl. Übungen).

26.7. Ausblick: harmonische Funktionen mit vorgegeben Randwerten

Im Folgenden: $U \subsetneq \mathbb{C}^2$ offen, einfach zusammenhängend mit glatter Randkurve ∂U



$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \Delta \phi(x) = 0 & x \in U \\ \phi(x) = \phi_0(x) & x \in \partial U \end{array}}$$

Dirichlet Randproblem
(der Laplace-Gleichung)

Gesucht ist $\Phi : \overline{U} \to \mathbb{R}$ harmonisch auf U mit vorgegebenem Randwert ϕ_0.

Satz (Poissonsche Integralformel für $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$)

Für $\phi_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\exists\, c < \infty : |\phi_0(x)| \leq \frac{c}{1+|x|} \; \forall x \in \mathbb{R}$ löst

$$\phi(x,y) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(t) \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt$$

das Dirichlet Problem $(*)$ für $U = \mathbb{H}$

Beweisskizze: $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $F(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_0(t)}{t-z}\, dt$

Es gilt: i) F holomorph

ii) $\operatorname{Re} F(x+iy) = \phi(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}, y > 0$

vgl. S. 69

$\Rightarrow$ ϕ harmonisch auf U, d.h. $\Delta \phi(x,y) = 0$.

Aus nachfolgendem Lemma folgt:

$$\phi(x,0) = \lim_{y \downarrow 0} \phi(x,y) = \Phi_0(x) \qquad \square$$

Lemma (Approximierende Delta Funktion)

Für $\delta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}$, $\varepsilon > 0$ gilt:

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\, dt = 1$.

ii) für alle $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ beschränkt und $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+x)\, \delta_\varepsilon(t)\, dt = \varphi(x)$$

Beweis: i) Übung.

ii) $$|r.S. - l.S.| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(x+t)|}_{=: D(x,t)}\, \delta_\varepsilon(t)\, dt = (*)$$

- φ stetig bei $x \Rightarrow \forall \eta > 0\ \exists a > 0: \ |D(x,t)| \leq \eta$
- φ beschränkt $\Rightarrow \exists C < \infty: \forall x,t \in \mathbb{R}: \ |D(x,t)| \leq C$

$$(*) = \int_{-a}^{a} |D(x,t)|\, \delta_\varepsilon(t)\, dt + \int_{|t| \geq a} |D(x,t)|\, \delta_\varepsilon(t)\, dt$$

$$\leq \eta + C \int_{|t| > a} \delta_\varepsilon(t)\, dt$$

$$\int_{|t|>a} \delta_\varepsilon(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{a/\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{s^2+1} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 \quad \forall a>0.$$

Einsetzen liefert Beh. ii) $\square$

<u>Lösungsstrategie für (*) für andere U's:</u>

1. Ist $\psi: U \to \mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant und $U \subsetneq \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend, dann ist $U' = \psi(U)$ offen, einfach zusammenhängend.
(Gebietstreue holomorpher Abb., vgl. K. Jänich)

2. Ist $\Phi: U' \to \mathbb{C}$ harmonisch, dann ist $\Phi \circ \psi: U \to \mathbb{C}$ harmonisch. Es gilt nämlich:

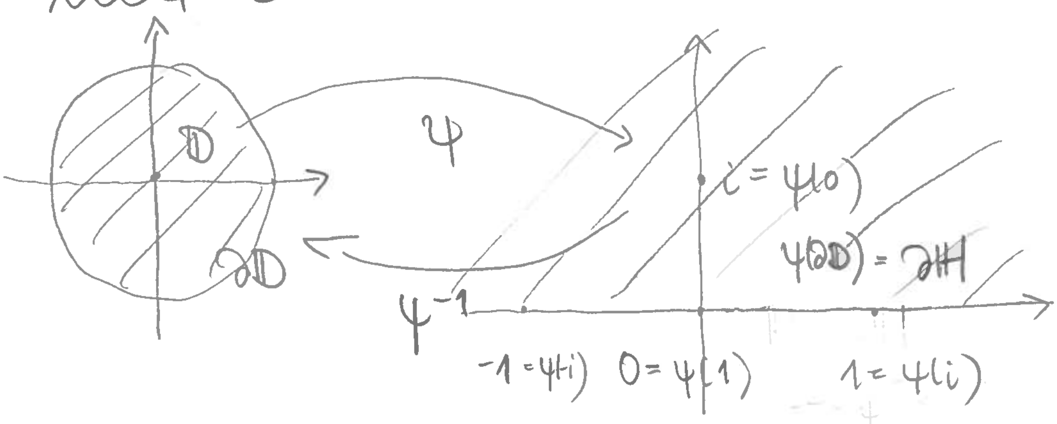
$$(\Delta\, \Phi\circ\psi)(z) = (\Delta\Phi)(\psi(z))\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}(z)\right|^2, \quad z \in U$$

Beispiel: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\psi: \mathbb{D} \to \mathbb{H}$

$$\psi(z) := i\,\frac{1-z}{1+z}$$

(Konforme Abb.!)

$$\psi^{-1}(w) = \frac{1+iw}{1-iw}$$



Geg: $\Phi_0(e^{i\theta}) = \begin{cases} \Phi_0 & \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Gesucht: Lösung des Dirichlet RP (*) für $U = \mathbb{D}$.

Lösung mittels Poissonscher Integralformel auf $\mathbb{H}$:

$$\Phi_0(\psi^{-1}(w)) = \begin{cases} \Phi_0 & w \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,dt \underset{\text{Subst } s := \frac{t-x}{y}}{=} \frac{\Phi_0}{\pi}\int_{\frac{-1-x}{y}}^{\frac{1-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2}$$

$$= \frac{\Phi_0}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1-x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{1+x}{y}\right)\right]$$

$\Rightarrow \Phi(\psi(z))$ löst Dirichlet RP für $z \in \mathbb{D}$.

In diesem Zusammenhang interessant:

> **Satz** (Riemannscher Abbildungssatz)
> Sei $U \subsetneq \mathbb{C}$ offen, einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine konforme Abb. $f: U \to \mathbb{D}$.

(vgl. K. Jänich)