Dann ist F komplex diffbar bei z_0 mit $F'(z_0) = f(z_0)$,

denn: $\int_{\partial \triangle} f(w)\,dw = 0$

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0} \int_{\beta_z} f(w)\,dw = \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,dt \xrightarrow{z \to z_0} f(z_0)$$

Durch Verschieben des Dreiecks folgt F ist auf ganz U holomorph. Nach Potenzreihensatz ist somit f auch auf ganz U holomorph. $\square$

Fazit: $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.

$\iff$ f lokal als Potenzreihe darstellbar („analytisch")

$\iff$ $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$ für null-homotope γ

$\iff$ $\tilde{f}$ ist reell diffbar & CR-Gleichung erfüllt.

$\iff$ f besitzt komplexe Stammfkt auf einfach zusammenhängenden U's.

Satz (Liouville)

Jede beschränkte ganze Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis: K. Jänich bzw. Übung. $\square$

Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $f(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Angenommen f hat keine Nullstelle.

Dann wäre $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ eine ganze Funktion.

Da $\frac{1}{|f(z)|} \to 0$ für $|z| \to \infty$ gibt es $r \in \mathbb{R}$ mit

Kompaktheit & Stetigkeit

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{1}{|f(z)|} = \sup_{|z| \leq r} \frac{1}{|f(z)|} \overset{\downarrow}{=} \max_{|z| \leq r} \frac{1}{|f(z)|} < \infty$$

Keine Nullstelle!

Damit ist $f = \text{konst.}$ nach Satz von Liouville. $\lightning$ $\square$

26.3. Nullstellen, Identitätssatz und das Prinzip der analytischen Fortsetzung

Def: Eine holomorphe Fkt $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, besitzt eine *n-fache Nullstelle* bei $z_0 \in U$, wenn:

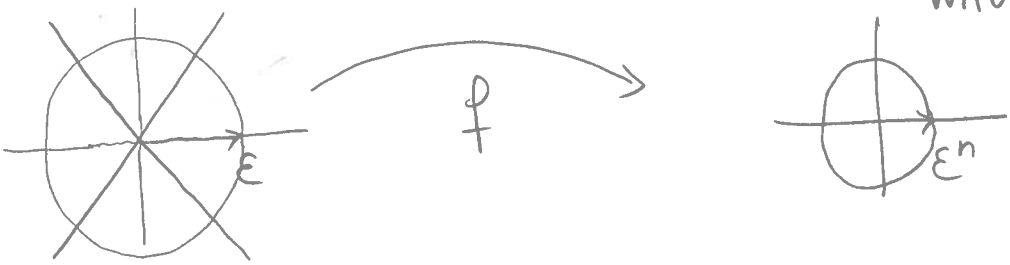
$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}: \quad f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Somit besitzt Potenzreihe um z_0 die Form:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Bsp: $f(z) = z^n = |z|^n e^{in\varphi}$

jeder Wert $\neq 0$ wird n mal angenommen!



Bis auf eine multiplikative Konstante und Verschiebung um z_0 sehen alle holomorphen Fkten in der Umgebung einer n-fachen Nullstelle so aus. Es gilt:

Satz: Ist $z_0 \in U$ eine $n$fache Nullstelle einer holomorphen Fkt $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, dann gilt:

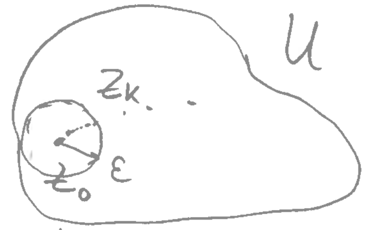
1. z_0 ist die einzige Nullstelle von f auf einer genügend kleinen Umgebung von z_0
2. das Bild jeder Umgebung von z_0 unter f enthält eine kleine Kreisscheibe um 0.

Beweis: K. Jänich bzw. Teil 1: Übung $\square$

Satz (Identitätssatz)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen & zusammenhängend und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann sind äquivalent:

1. $\forall z \in U: \ f(z) = 0$
2. $\exists V \subset U$ offen: $f(z) = 0 \ \forall z \in V$
3. $\{z \in U \mid f(z) = 0\}$ besitzt einen Häufungspunkt (HP) in U
4. $\exists z_0 \in U \ \forall n \in \mathbb{N}_0: \ f^{(n)}(z_0) = 0$.

Beweis: $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.$ ✓



$3. \Rightarrow 4.$ Sei $z_0 \in U$ der HP. Es gibt $\varepsilon > 0$, so daß: i) $\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \subset U: \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

ii) $\exists (z_k) \subset B_\varepsilon(z_0): \ \lim_{k \to \infty} z_k = z_0 \wedge f(z_k) = 0$.

Satz zum Koeffizientenvergleich von Potenzreihen (Analysis 1)

folgt: $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Somit: $f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n = 0$.

<u>4 ⟹ 1.</u>: Sei $M_n := \{ z \in \mathcal{U} \mid f^{(n)}(z) = 0 \}$, $M := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$.

Da $f^{(n)}$ stetig, ist M_n abgeschlossen in $\mathcal{U}$. Somit M abgeschlossen

Ist $\tilde{z} \in M$, dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\tilde{z})}{n!} (z - \tilde{z})^n \qquad \forall\, z \in B_\varepsilon(\tilde{z}) \subset \mathcal{U}.$$

$$= 0$$

Also $B_\varepsilon(\tilde{z}) \subset M$ und somit M offen.

Da $z_0 \in M \neq \emptyset$ und $\mathcal{U}$ zusammenhängend, gilt $M = \mathcal{U}$ □

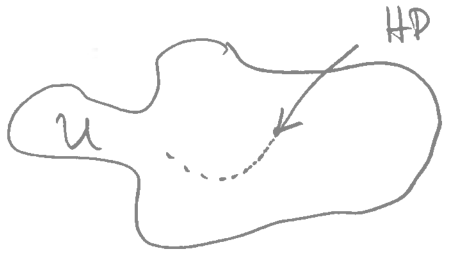
<u>Korollar</u>: Sind $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorphe Fkten auf offenen & zusammenhängenden Menge $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ und $V \subset \mathcal{U}$, so daß

$$f|_V = g|_V.$$

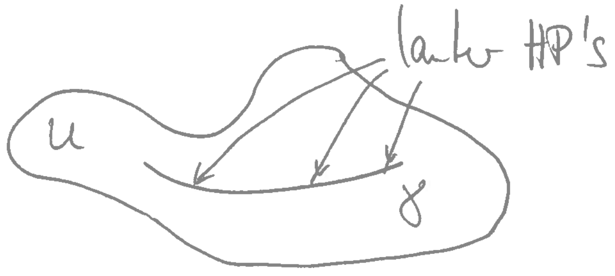
Besitzt V einen HP, dann gilt: $f = g$ auf ganz $\mathcal{U}$

<u>Beweis</u>: 3. ⟹ 1. im Identitätssatz angewandt auf $f - g$ □

Bspe für Pktmengen mit HP in U:



Folge $z_n \to z \in U$



Spur einer Kurve γ in U.

Einfache Anwendung des Identitätssatzes:

Fortsetzung von Identitäten von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$. z.B.

$$(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Beweis: $f(z) = (\sin z)^2 + (\cos z)^2$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und stimmt mit $g(z) = 1$ auf $\mathbb{R}$ überein. Da g holomorph auf $\mathbb{C}$ gilt: $f = g$ $\square$

Def: (Analytische Fortsetzung auf größere Gebiete)
Sei $f: U \to \mathbb{C}$, und $g: \tilde{U} \to \mathbb{C}$ holomorph und $U \subsetneq \tilde{U}$, so daß $f(z) = g(z)$ $\forall z \in U$, dann heißt g analytische Fortsetzung von f auf $\tilde{U}$.

Bem: Nach Identitätssatz ist g eindeutig, wenn es existiert und U einen HP besitzt (z.B. U offen).

<u>Beispiel</u>: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist holomorph auf $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$

$g(z)=\frac{1}{1-z}$ ist analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

<u>Def</u>: (Analytische Fortsetzung von Potenzreihen entlang Kurven)

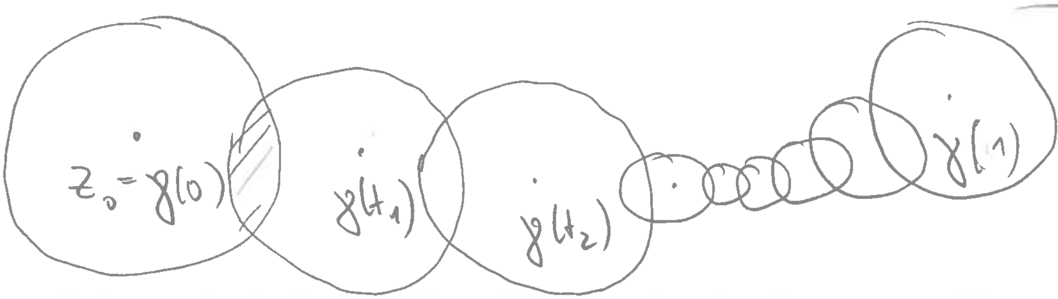
Sei $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ Kurve und $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ konv. Potenzreihe um $z_0=\gamma(0)$. Dann heißt die Familie

$$f_t(z):=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\,(z-\gamma(t))^n \quad t\in\{t_i\}_{i=1..N},\ 0=t_1<t_2<\dots<t_N=1$$

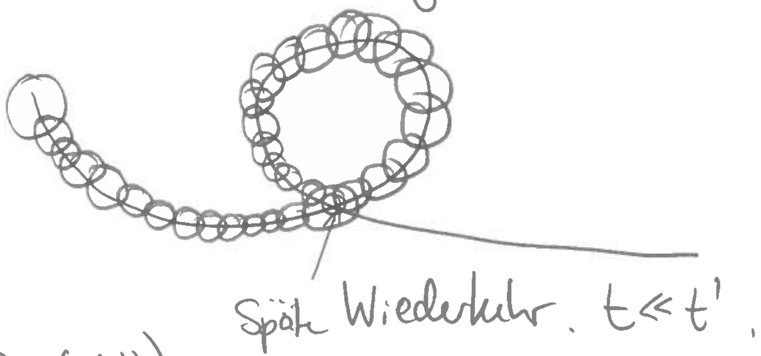
von auf Kreisscheiben $B_{\varepsilon_1}(\gamma(t_1)),\dots,B_{\varepsilon_n}(\gamma(t_N))$ konvergenten Potenzreihen <u>analytische Fortsetzung</u> von f entlang γ, wenn:

1. $B_{\varepsilon_j}(\gamma(t_j))\cap B_{\varepsilon_{j+1}}(\gamma(t_{j+1}))\neq\emptyset \quad \forall\, j=1,\dots,N-1.$
2. $f_{t_1}(z)=f(z) \quad \forall\, z\in B_{\varepsilon_1}(z_0)$
3. Die Potenzreihen sind lokal verträglich, d.h.

$$f_{t_j}(z)=f_{t_{j+1}}(z) \quad \forall\, z\in B_{\varepsilon_j}(\gamma(t_j))\cap B_{\varepsilon_{j+1}}(\gamma(t_{j+1}))$$



<u>Bemerkungen:</u> 1. Es wird keine Verträglichkeit bei später Wiederkehr verlangt:



$$f_t(z) \neq f_{t'}(z)$$

für $z \in B_{\varepsilon_t}(\gamma(t)) \cap B_{\varepsilon_{t'}}(\gamma(t'))$

2. Gibt es eine analytische Fortsetzung, so ist diese Eindeutig (Identitätssatz)

<u>Bsp:</u> <u>Komplexer Logarithmus</u> $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,\infty)$.

Analytische Fortsetzung entlang γ durch Entwicklung um $\gamma(t)$:

$$\ln(e^{it}+z) = it - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e^{-it} z\right)^n$$

Somit: $$\boxed{f_t(z) = it - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e^{-it} z - 1\right)^n}$$

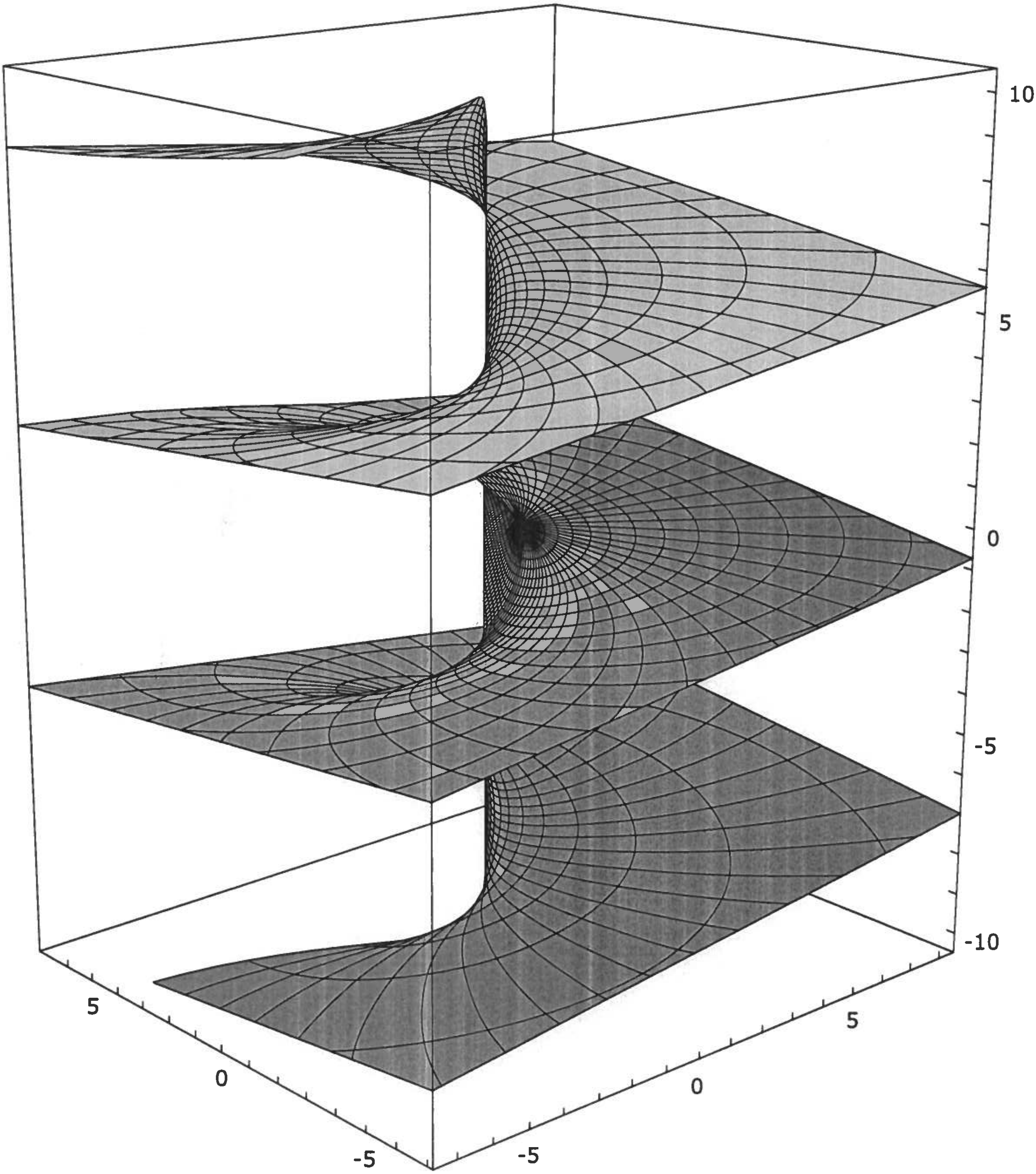
Es gilt: 1. $f_0(z) = \ln(z)$

2. $f_{2\pi n}(z) = 2\pi i n + \ln(z) \quad \forall\, |z-1| < 1$

↑ späte Wiederkehr!

Um eine eindeutige Fkt zu bekommen setzt man auf sog. Riemannschen Blätter fort (vgl. Abb.)

Riemannsche Blätter



26.4. Laurentreihen

Def: Für eine holomorphe Funktion $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, heißt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$ isolierte Singularität, falls

$$\exists \varepsilon > 0: \quad B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U.$$

Klassifikation isolierter Singularitäten:

Def: Sei z_0 eine isolierte Singularität von $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen.

1. z_0 heißt hebbar, wenn f eine analytische Fortsetzung auf $U \cup \{z_0\}$ besitzt.
2. z_0 heißt Pol, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $(z-z_0)^n f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 besitzt. Das kleinste derartige n heißt Ordnung des Pols.
3. z_0 heißt wesentliche Singularität, falls sie weder hebbar noch Pol ist.

Beispiele: 1. $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ besitzt hebbare Singularität bei 0. Denn: $\mathbb{C} \ni z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ ist analytische Fortsetzung.

2. Ist $g: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $g(z_0) \neq 0$, dann besitzt $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ bei z_0 einen Pol $n$ter Ordnung.

3. $f(z) = e^{1/z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und hat bei 0 eine wesentliche Singularität.

Im Folgenden: Beschreibung des Verhaltens holomorpher Funktionen in der Nähe einer isolierten Singularität mittels verallgemeinerter Potenzreihen:

<u>Def:</u> Für $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißen die Reihen

$$H(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n =: N(z)$$

Haupt- und Nebenteil der Laurentreihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n := H(z) + N(z)$$

Diese heißt (absolut, gleichmäßig, ...) konvergent, falls dies für H und N zutrifft.

<u>Bem:</u> $\frac{1}{r} \in [0,\infty]$ Konvergenzradius von H

$R \in [0,\infty]$ — " — N

$\Rightarrow$ Laurentreihe konvergiert auf

$$K_{r,R}(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

und stellt dort holomorphe Fkt dar.

H konvergiert — N konvergiert — Laurentreihe konvergiert

<u>Lemma:</u> Konvergiert $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n$ auf $K_{r,R_0}(z_0)$, dann gilt für $\rho \in (r, R)$: $\quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz, \; n \in \mathbb{Z}$

Beweis: o.B.d.A $z_0 = 0$.

$$\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} \, dz \overset{S.}{=} 2\pi i \, c_n$$

gleichmäßige Konv. von H & N auf $|z| = \rho$ erlaubt gliedweise Integration.

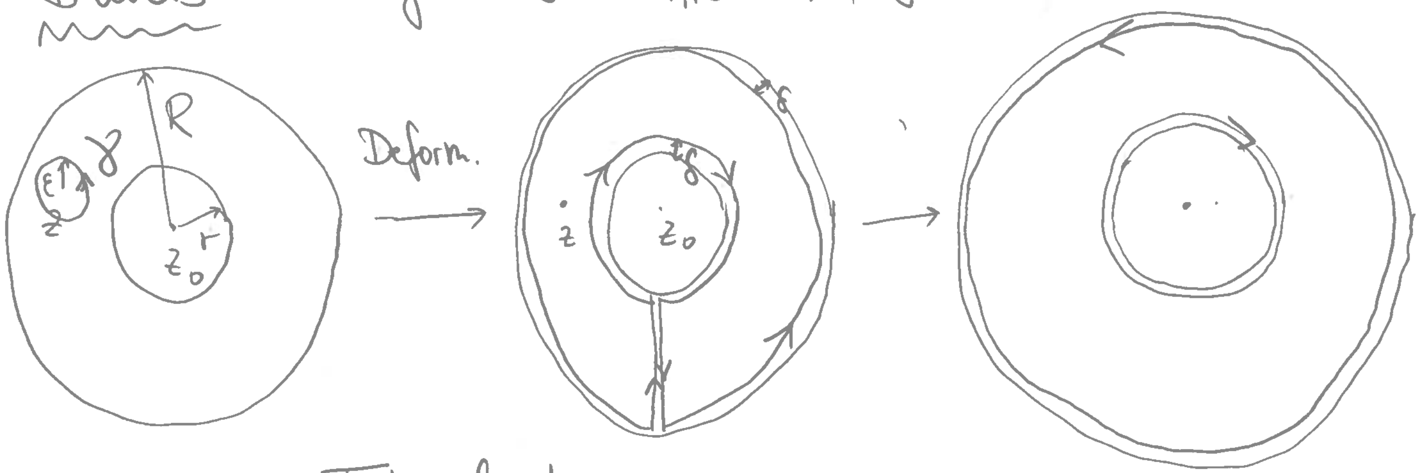
$\square$

Satz (Laurentreihenentwicklung)

Ist $f: K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n \quad \text{mit } c_n \text{ aus Lemma.}$$

Beweis: Sei $\gamma: [0,1] \to K_{r,R}(z_0)$, $\gamma(t) = z + \varepsilon e^{i2\pi t}$ mit $\varepsilon > 0$.



Cauchyscher Integralsatz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R-\delta} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r+\delta} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R-\delta} \frac{f(w)}{w}\,\frac{dw}{1-\frac{z}{w}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r+\delta} \frac{f(w)}{z}\,\frac{dw}{1-\frac{w}{z}}$$

Geometrische Reihe: $\displaystyle \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n, \quad |z| < |w| < R.$

$\displaystyle \frac{1}{1-\frac{w}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^n, \quad r < |w| < |z|.$

Gliedweise Integration liefert Behauptung $\square$