26. Funktionentheorie

Lernziele: Komplexe Differentierbarkeit (holomorphe Fkten), Integralsatz von Cauchy, Residuenkalkül, Laurentreihen, Identitätssatz & analytische Fortsetzung, Kramer Kronig Relationen

Lit: · Kap. 5 in: M. Brokate, N. Henze, F. Hettlich, A. Meister, G. Schranz-Kirlinger, T. Sonar, Grundwissen Mathematik: Höhere Analysis, Numerik & Stochastik, Springer 2016

· K. Jänich, Funktionentheorie, Springer 2004.

Die Funktionentheorie behandelt Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$.

26.1. Komplexe Differenzierbarkeit

Def: $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen heißt:

1. komplex differenzierbar bei $z_0 \in U$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \quad \text{existiert.}$$

2. holomorph in U, wenn f in allen Pkten $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist.

Ist $U = \mathbb{C}$, nennt man holomorphe Funktionen auch ganze Fkten.

Komplexe vs reelle Differenzierbarkeit:

1. Betrachte f als Fkt von $x = \mathrm{Re}\, z$ und $y = \mathrm{Im}\, z$:

$$\boxed{u(x,y) := \mathrm{Re}\, f(z) \qquad v(x,y) := \mathrm{Im}\, f(z)} \quad (*)$$

Komplexe Differenzierbarkeit von f bei z impliziert:

i) $$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\, \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right]$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

ii) $$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}, \quad h \in \mathbb{R}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i\, \frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih} \right]$$
$$= -i\, \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

i) + ii) $\Rightarrow$ Cauchy Riemann Differentialgleichungen

$$(CR) \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}$$

2. Sei umgekehrt $\tilde{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ bei (x,y) diff.bar, wobei u, v die CR Gleichungen bei (x,y) erfüllen.

$$D\tilde{f}(x,y) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \; b = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Somit für $h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: Diffbarkeit bei (x,y)!

$$\tilde{f}(x+h_1, y+h_2) - \tilde{f}(x,y) = D\tilde{f}(x,y)\, h + o(|h|)$$

$$= \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ bh_1 + ah_2 \end{pmatrix} + o(|h|) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(a+ib)(h_1+ih_2) \\ \mathrm{Im}\,(a+ib)(h_1+ih_2) \end{pmatrix} + o(|h|)$$

Damit ist $f(z) := \tilde{f}(x,y)$ bei $z := x+iy$ komplex differenzierbar:

$$f'(z) = \lim_{h = h_1+ih_2 \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = a+ib \; .$$

Zusammenfassung:

Satz: $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen ist genau dann bei $z = x+iy \in U$ komplex differenzierbar, falls $\tilde{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ mit u, v aus $(*)$ bei (x,y) reell differenzierbar ist und u, v die CR Gleichungen erfüllen.

Beispiele: 1. Komplexe Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $\rho \in (0,\infty]$ sind holomorphe Funktionen auf $B_\rho(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \rho \}$.

Es gilt: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ (Übung!)

Diese Reihe besitzt denselben Konvergenzradius.

Somit sind ganze Funktionen: e^z, $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\cosh(z) = \cos(iz)$
$\sinh(z) = \frac{1}{i}\sin(iz)$.

2. $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $f'(z) = -\frac{n}{z^{n-1}}$

3. Nirgends komplex differenzierbar sind z.B.

i) $f(z) = \bar{z} = x - iy$, denn: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$

ii) $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ — $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$.

<u>Ergänzungen:</u>

1. Rechenregeln für komplexe Differenzierbarkeit: $f,g: U \to \mathbb{C}$ holomorph

i) $(f+g)' = f' + g'$ ii) $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

iii) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\,g'(z)$ für $g(z) \in U$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2}$ für $g(z) \neq 0$.

2. Die Abb. $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Drehstreckung. Sie ist winkeltreu, falls sie von Null verschieden ist.

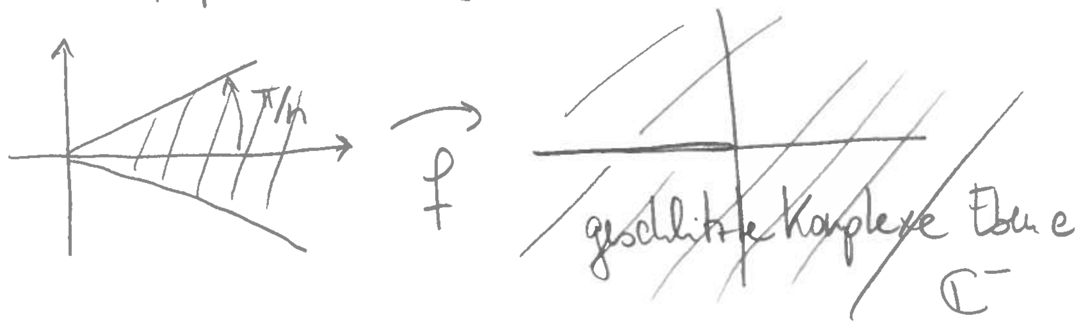
Man nennt $f: U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen lokal konform, wenn f holomorph ist und gilt: $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U$.

$f: U \to V$, $U, V \subset \mathbb{C}$ offen heißt konform, wenn f bijektiv und lokal konform ist.

Beispiele konformer Abbildungen:

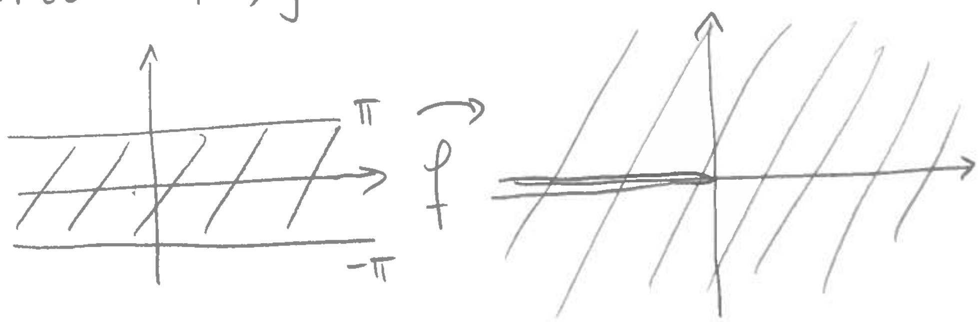
a) $f: \{re^{i\varphi} \mid r > 0,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n})\} \to \overbrace{\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z < 0\}}^{\mathbb{C}^-}$

$f(z) = z^n$



b) $f: \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\} \to \mathbb{C}^-$

$f(z) = e^z$



3. Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph wird sich später herausstellen, daß $u, v \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ und somit

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) \overset{CR}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \overset{\text{Vertauschbarkeit 2. Abl.}}{=} 0$$

$$\Delta v(x,y) = (\text{analog}) = 0.$$

Man nennt Funktionen $g: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Delta g = 0$ harmonisch. $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ von holomorphen Fkt. $f: U \to \mathbb{C}$ sind stets harmonisch.

26.2. Cauchyscher Integralsatz:

Def: Für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to U$ stetig differenzierbar definieren wir für $f : U \to \mathbb{C}$ stetig:

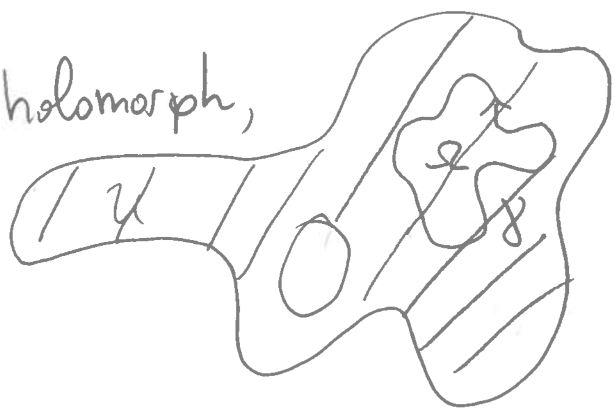
$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt}$$

das (komplexe) Kurvenintegral (oder Konturintegral). Analog setzt man für stückweise stetig diff.bare Kurven γ in U, welche sich aus $\gamma_j \in \mathcal{C}^1$ zusammensetzen: $\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$.

Bsp: $\gamma(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n\, ire^{it}\,dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Aus S.64 wurde gezeigt: $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{\Omega} \subset U$ mit $\mathcal{C}^1$-Randkurve γ



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

Solche Kurven sind Beispiele null-homotoper Kurven in U

Mit $(*)$ läßt sich damit unten stehende Version des Cauchyschen Integralsatzes beweisen.

Def: 1. Eine geschlossene Kurve $\gamma: [0,1] \to U \subset \mathbb{C}$ heißt *null-homotop in U*, falls sie sich stetig in U zu einem Pkt $z_0 \in U$ zusammenziehen läßt, d.h.

$$\exists\, F \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1], U): \quad F(0,t) = \gamma(t) \;\wedge\; F(1,t) = z_0 \quad \forall t \in [0,1]$$

2. Zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2: [0,1] \to U \subset \mathbb{C}$ mit gleichen Randpkten heißen *homotop in U*, falls die Verknüpfung $\gamma: [0,2] \to U$

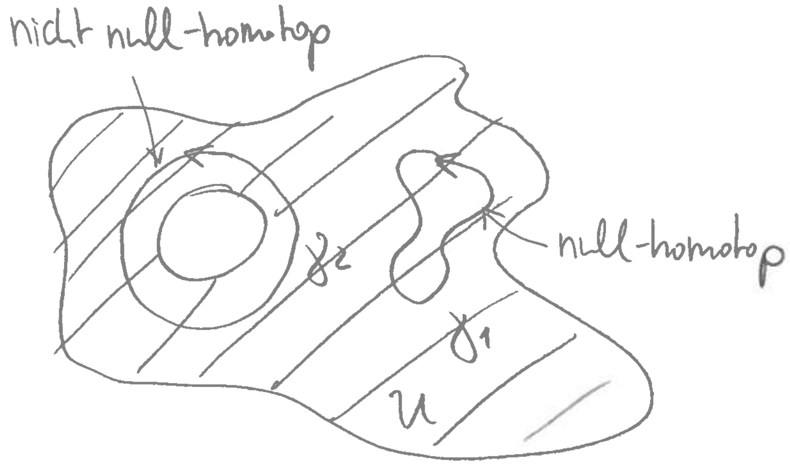
$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(2-t) & t \in (1,2] \end{cases}$$ null-homotop ist.

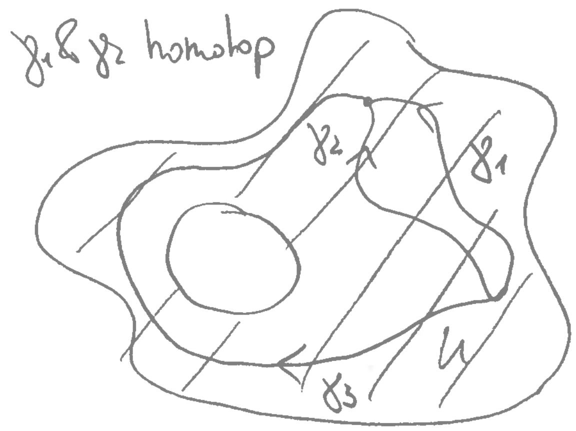
Satz (Integralsatz von Cauchy)

Für holomorphe $f: U \to \mathbb{C}$ auf $U \subset \mathbb{C}$ offen gilt:

1. Sind γ_1, γ_2 homotope Kurven in U: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$
2. Ist γ null-homotope geschlossene Kurve:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$





Def. Eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt

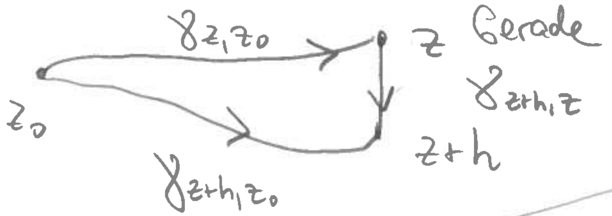
1. *zusammenhängend*, falls sich je 2 Punkte in U durch eine Kurve in U verbinden lassen.
2. *einfach zusammenhängend*, falls sie zusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve null-homotop ist.

Satz (Existenz der Stammfunktion)

Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $\boxed{F(z) := \int_{\gamma_{z,z_0}} f(w)\,dw}$ mit γ_{z,z_0} Verbindungskurve mit Anfangspkt $z_0 \in U$ und Endpkt $z \in U$ eine holomorphe Stammfkt, d.h. $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in U$.

Abkürzung: $\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw := \int_{\gamma_{z,z_0}} f(w)\,dw$

Beweis:



Cauchyscher Int.satz:

$$F(z+h) = F(z) + \int_{\gamma_{z+h,z}} f(w)\,dw$$

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_{z+h,z}} \big(f(w)-f(z)\big)\,dw \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^b \big(f(\gamma(t))-f(z)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt \right| \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \frac{1}{|h|} \sup_{w \in B_{|h|}(z)} |f(w)-f(z)| \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$$

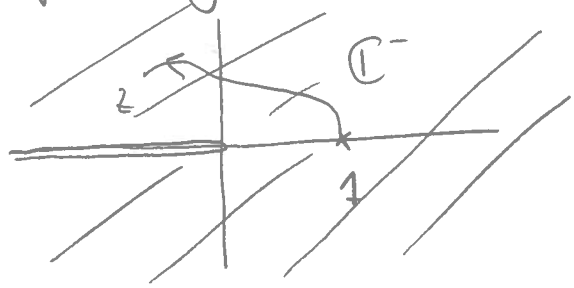
$$\leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in B_{|h|}(z)} |f(w) - f(z)| \cdot \underbrace{(\text{Länge von } \gamma)}_{= |h| \text{ für } \gamma \text{ gerade Linie}}.$$

$$\leq \sup_{w \in B_{|h|}(z)} |f(w) - f(z)| \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0 .$$

$\square$

<u>Beispiel:</u> Hauptzweig des kompl. Logarithmus: $\ln : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\ln(z) := \int_1^z \frac{1}{w}\, dw}$$



Es gilt: • $\ln'(z) = \frac{1}{z}$, $\ln(1) = 0$

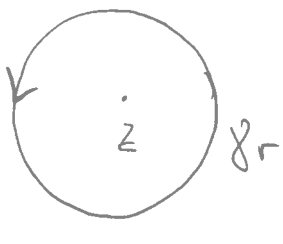
• $\ln(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

(Übung!)

Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz:

<u>Satz</u> (Cauchysche Integralformel) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B_r(z)} := \{ w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq r \} \subset U$ und $\gamma_r : [0,1] \to U$, $\gamma_r(t) := z + re^{2\pi i t}$. Dann gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z)}$$



Beweis: $U\setminus\{z\} \ni w \to \dfrac{f(w)}{w-z}$ ist holomorph.

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \underset{\substack{\text{Cauchyscher}\\ \text{Int. satz}}}{=} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z}\,dw$$

- S. 70: $\displaystyle\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$
- Da f holomorph: $\displaystyle\sup_{w\in B_r(z)} \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right| = M_r < \infty$.

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dz \right| \le M_r \cdot (\text{Länge von } \gamma_\varepsilon)$$
$$= M_r \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0.$$

$\square$

Korollar (Mittelwerteigenschaft) Unter Vor. von oben gilt:

$$\boxed{\int_0^1 f(z+re^{2\pi i t})\,dt = f(z)}$$

Beweis: Übung.

Abkürzung: $\displaystyle\int_{|w-z|=r} f(z)\,dz := \int_{\gamma_r} f(z)\,dz$

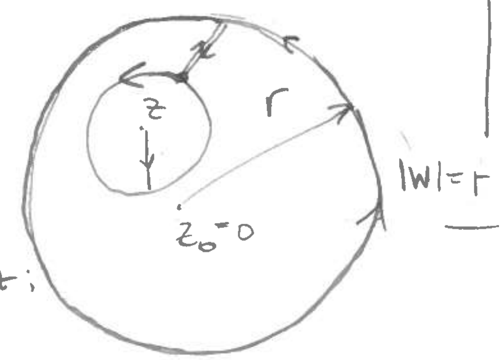
$$\gamma_r(t) = z + re^{2\pi i t}$$

Satz (Potenzreihenentwicklung)

Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, $U \subset \mathbb{C}$ offen. Dann besitzt f auf $B_r(z_0)$ die folgende Darstellung als absolut konvergente Potenzreihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad z \in B_r(z_0)$$

mit $$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz.$$



Beweis: o.B.d.A. $z_0 = 0$.

Cauchy Int. satz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \frac{1}{1-\frac{z}{w}} \, dw$$

Geometrische Reihe: $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$: $\left(1-\frac{z}{w}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n$

Konvergenz ist für z fest absolut und gleichmäßig auf $|w|=r$.

Da $\frac{f(w)}{w}$ stetig, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n$ absolut und gleichmäßig auf $|w|=r$.

gl. mäßige Konvergenz

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw$$

$\square$

Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Cauchysche Abschätzung der Koeffizienten:

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \frac{\sup\limits_{|w-z|=r} |f(w)|}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{\sup\limits_{|w-z|=r} |f(w)|}{r^n} . \qquad (*)$$

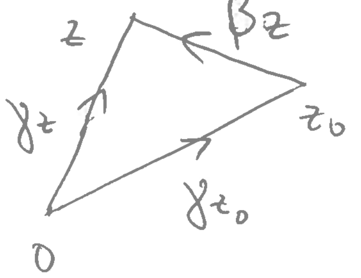
2. $f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Korollar: Eine holomorphe Fkt ist beliebig oft komplex differenzierbar.

Beweis: Ist f holomorph bei z, gibt es eine Umgebung von z in der $f(z)$ und $f'(z)$ als (abs. konvergente) Potenzreihe geschrieben werden kann. □

Satz (Morera) Sei $f: U \to \mathbb{C}$ stetig auf $U \subset \mathbb{C}$ offen. Falls für jede Randkurve γ einer ganz in U liegenden Dreiecksfläche gilt $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$, dann ist f holomorph.

Beweis:



Betrachte o.B.d.A. Dreieck $(0, z, z_0)$ mit geraden Randkurvenstücken und

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,dw .$$