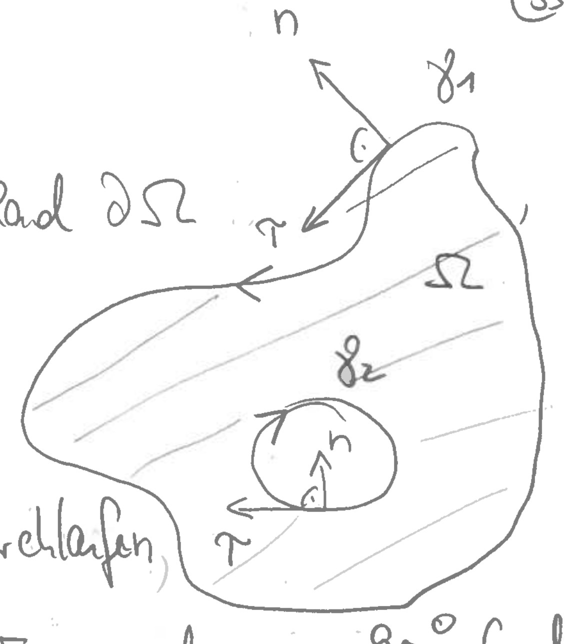
25.4. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$



Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit C^1-Rand $\partial\Omega$ setzt sich $\partial\Omega$ als Vereinigung von geschlossenen C^1-Kurven $\gamma_j : I_j \to \mathbb{R}^2$ zusammen. Diese kann man so durchlaufen, daß

$$\boxed{\tau(\gamma_j(s)) := \frac{\dot\gamma_j(s)}{|\dot\gamma_j(s)|}}$$

$s \in I_j$, aus der um 90° Grad (im math. pos. Sinn!) gedrehten äußeren Normalen $n(p)$ bei $p = \gamma_j(s)$ hervorgeht, d.h. $\boxed{T(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n(p)}$.

Das Vektorfeld $T : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ legt somit eine Orientierung auf $\partial\Omega$ fest. Man bezeichnet für stetige Vektorfelder $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \langle v(y), dT(y) \rangle} := \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \langle v(r), dr \rangle$$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{N} \int_{I_j} \Big\langle v(\gamma_j(s)), \underbrace{\frac{\dot\gamma_j(s)}{|\dot\gamma_j(s)|}}_{= T(\gamma(s))} \Big\rangle |\dot\gamma(s)| \, ds}$$

das orientierte Kurvenintegral über $\partial\Omega$.

Bem.: $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle v(y), dT(y) \rangle = \int_{\partial\Omega} \langle v(y), T(y) \rangle \, dS(y)$!

Satz (von Stokes im $\mathbb{R}^2$)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand, welcher mit Orientierung $T(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n(p)$, $p \in \partial\Omega$ versehen ist, wobei $n(p)$ äußere Normale bei p bezeichnet. Dann gilt für alle $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^2)$ mit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$:

$$\int_{\partial\Omega} \langle v(y), dT(y) \rangle = \int_{\Omega} \big(\underbrace{\partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x)}_{= \operatorname{rot} v(x)\,!} \big)\, dx$$

Beweis:

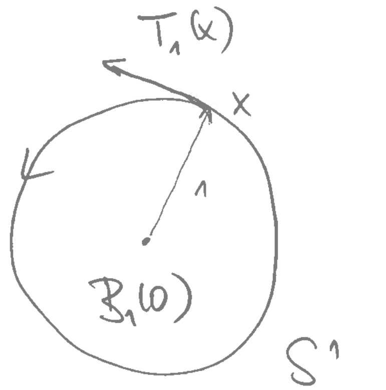
$$\text{r.S.} = \int_\Omega \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}(x)\, dx \underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} v_2(y) \\ -v_1(y) \end{pmatrix}, n(y) \right\rangle dS(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \end{pmatrix}, n(y) \right\rangle dS(y) = \int_{\partial\Omega} \Big\langle v(y), \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} n(y)}_{= T(y)} \Big\rangle dS(y)$$

$$= \text{l.S.} \qquad \square$$

Beispiel: Kurvenintegral via Stokes

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + x_1^2} - x_2 e^{x_1 x_2} + 3x_2 \\ x_1^2 - x_1 e^{x_1 x_2} + \log(1 + x_2^4) \end{pmatrix}$$



S^1 mit Orientierung $T_1(x) := \dfrac{x}{|x|}$

$$\int_{S^1} \langle v(y), d\tau(y)\rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{B_1(0)} \left(2x_1 - e^{x_1x_2} - x_1x_2 e^{x_1x_2} + e^{x_1x_2} - x_1x_2 e^{x_1x_2} - 3\right) dx$$

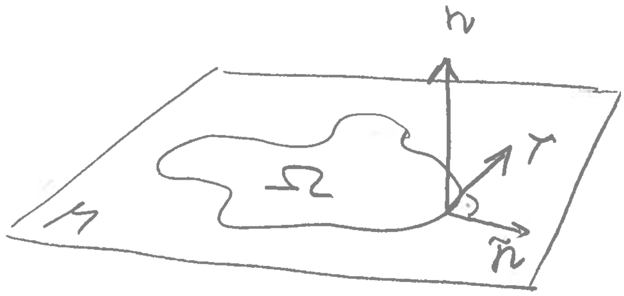
$$= \int_{B_1(0)} (2x_1 - 3)\, dx = -3 \int_{B_1(0)} dx = -3\pi .$$

Bem. Alternativ hätten wir obiges Kurvenintegral durch Parametrisierung von $S^1 \setminus \{\binom{1}{0}\}$ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in (0, 2\pi)$ berechnen können: $\int_{S^1} \langle v(y), d\tau(y)\rangle = \int_0^{2\pi} \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt$

$= (\text{komplizierte Rechnung}) = -3\pi .$

25.5. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$ liefert im Spezialfall:



- $M = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ 2-dim UMF
- $\Omega \subset M$ offen, beschr. mit C^1-Rand
- $v \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\overline{\Omega} \subset U$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} \langle v(y), d\tau(y)\rangle = \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} v(x), n(x)\rangle\, dS(x)}$$

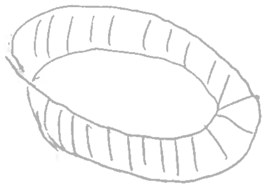
wobei $\tau = n \times \tilde n$, $n = e_3$, $\tilde n$ äußere Normale von Ω in M

und $\operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x) \\ \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x) \\ \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) \end{pmatrix}$ Rotation von v in $x \in U$.

Zur Verallgemeinerung auf 2-dim UMF $M \subset \mathbb{R}^3$ benötigen wir Orientierbarkeit

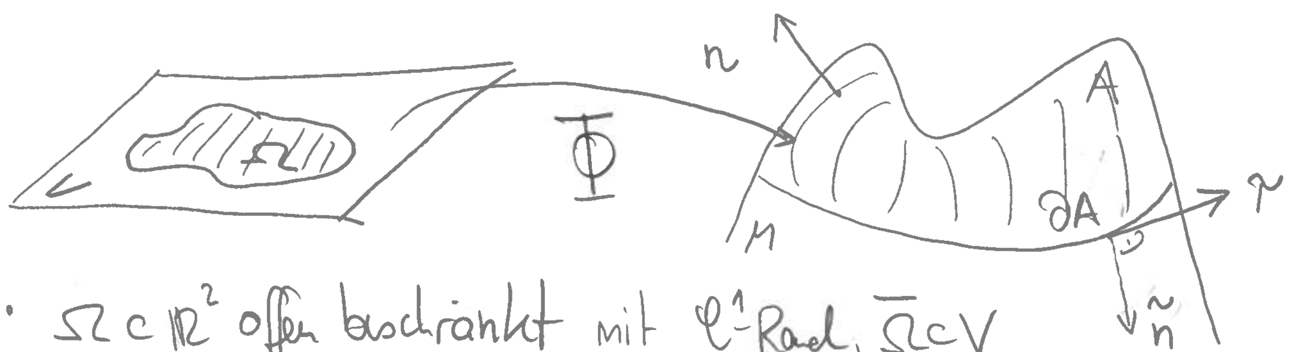
Def: Eine $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *orientierbar*, falls es ein stetiges Vektorfeld $n: M \to \mathbb{R}^n$ mit $|n(p)| = 1$ und $n(p) \in N_p M$ für alle $p \in M$ gibt. Ein solches Vektorfeld heißt *Orientierung* und das Paar (M, n) eine *orientierte $\mathcal{C}^1$-UMF*.

Bem: Für $n \geq 3$ sind nicht alle $\mathcal{C}^1$-UMF's orientierbar.



Gegenbeispiel: Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$.

Wir betrachten im Folgenden 2-dim. orientierte $\mathcal{C}^2$-UMF (M, n) die durch eine Karte $\Phi: V \to U$ beschrieben werden.



- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand, $\overline{\Omega} \subset V$
- $A := \Phi(\Omega)$

Dann gilt:
1. $\partial A = \Phi(\partial \Omega)$ ist 1-dim $\mathcal{C}^1$-UMF („Randkurve")
2. Auf ∂A gibt es äußeres Normalenvektorfeld

$\tilde{n}: \partial A \to \mathbb{R}^3$ mit $|\tilde{n}(y)| = 1$, $\tilde{n}(y) \in T_y M$

(Konstruktion analog zu äußeren Normalen VF von Ω)

3. Durch n wird auf ∂A via $\tau: \partial A \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{T(y) := n(y) \times \tilde{n}(y)}$$

("rechte Hand Regel")

eine induzierte Orientierung festgelegt.

Satz (von Stokes im $\mathbb{R}^3$)

Sei (M,n) eine 2-dim. orientierte $\mathcal{C}^2$-UMF im $\mathbb{R}^3$ und $\phi: V \to U$ Karte von M. Dann gilt für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand, $\overline{\Omega} \subset V$ und $v \in \mathcal{C}^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^3)$, $U \subset \tilde{U}$ offen:

$$\int_{\partial A} \langle \cancel{\mathrm{rot}}\, v(y), dT(y) \rangle = \int_A \langle \mathrm{rot}\, v(x), n(x) \rangle \, dS(x)$$

wobei $A := \phi(\Omega)$ und T die auf $\partial A = \phi(\partial\Omega)$ durch n induzierte Orientierung bezeichnet.

<u>Beispiel:</u> $v(x) := \begin{pmatrix} e^{x_1+2x_2} \\ \ln(2+x_2^2) + 2e^{x_1+2x_2} \\ 3x_1x_2x_3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3$

$M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2\}$

M ist positiver 3-Richtung orientiert, d.h. $n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A = M \cap \{x_3 > 0\}$ $\quad \partial A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge x_3 = 0$

Induzierte Orientierung: $\tau(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \partial A.$

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(x), n(x) \rangle \, dS(x) \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial A} \langle v(y), d\tau(y) \rangle$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} \int_D \langle \operatorname{rot} v(x), n(x) \rangle \, dS(x) = (*)$$

wobei $D := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ mit

Orientierung $n(x) = e_3$. Beachte: $\partial D = \partial A$.

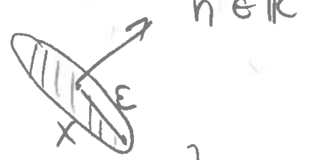
Da $(\operatorname{rot} v(x))_3 = \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) = 0$ folgt:

$$(*) = 0.$$

Bemerkungen & Ergänzungen zum Satz von Stokes:

1. Läßt sich auf endliche Vereinigung von Mengen vom Typ A und stückweise „glatte" A's verallgemeinern.

2. Interpretation: $\int_{\partial A} \langle v(y), d\tau(y)\rangle$ heißt <u>Zirkulation</u> des VF v entlang ∂A. Speziell: $D_\varepsilon(x)$

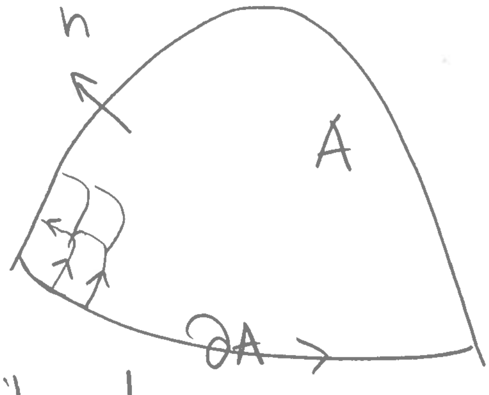


$$A = D_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid y \cdot n = 0 \wedge |x-y| < \varepsilon \}$$

$$\boxed{\langle n, \operatorname{rot} v(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial D_\varepsilon(x)} \langle v(y), d\tau(y) \rangle}$$

Rotation ist <u>Wirbelstärke</u>!

3. Anschauliche Begründung:



Zirkulationen benachbarter Plaquetten heben sich weg

Nur Randterme ∂A bleiben übrig!

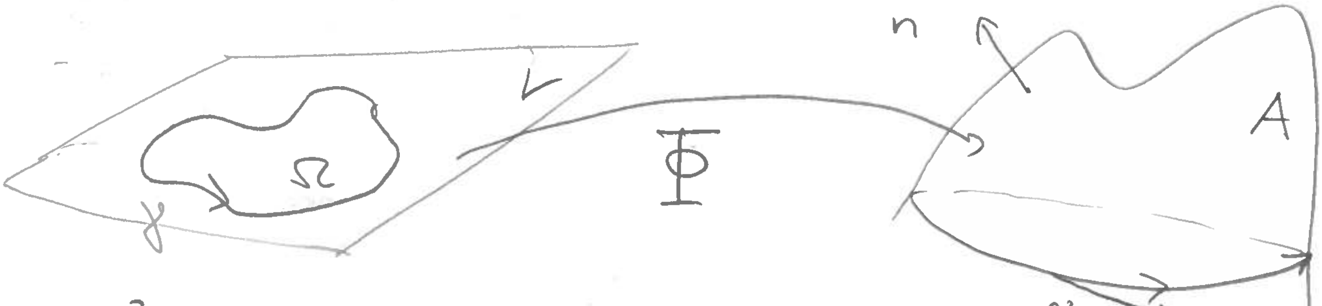
4. Stokes in allgemeiner Raumdimension:

Vorlesung über Differentialformen!

Beweis des Satzes von Stokes:

Schritt 1: o.B.d.A. $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ Kurve mit $\gamma(I) = \partial\Omega$

Dann ist $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma}(s) := \phi(\gamma(s))$ Kurve mit $\tilde{\gamma}(0,1) = \partial A$



$\mathcal{C}^2$-Karte $\phi : V \to \mathcal{U}$.

$$\int_{\partial A} \langle v(y), d\tau(y) \rangle = \int_I \langle v(\phi(\gamma(s))), D\phi(\gamma(s))\,\dot{\gamma}(s) \rangle \, ds$$

$$= \int_I \langle (D\phi(\gamma(s)))^T v(\phi(\gamma(s))), \dot{\gamma}(s) \rangle \, ds \quad = (*)$$

Definiere $v^*(x) := D\phi(x)^T v(x)$, $x \in V$. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$:

$$(*) = \int_\Omega \underbrace{\left(\partial_1 v_2^*(x) - \partial_2 v_1^*(x)\right)}_{= \operatorname{rot} v^*(x)} dx$$

Schritt 2: $\operatorname{rot} v^*(x) = \sum_{k=1}^{3} \left[(\partial_2 \phi_k)(x)\, \partial_1 \left[v_k(\phi(x)) \right] - (\partial_1 \phi_k)(x)\, \partial_2 \left[v_k(\phi(x)) \right] \right]$

$$= \sum_{k,l} \left[(\partial_2 \phi_k)(x) (\partial_l v_k)(\phi(x)) (\partial_1 \phi_l)(x) - (\partial_1 \phi_k)(x) (\partial_l v_k)(\phi(x)) (\partial_2 \phi_l)(x) \right]$$

$$= \left\langle \left(Dv(\phi(x)) - Dv(\phi(x))^T \right) \partial_1 \phi(x), \partial_2 \phi(x) \right\rangle$$

$$= \left\langle (\operatorname{rot} v)(\phi(x)), \partial_1 \phi(x) \times \partial_2 \phi(x) \right\rangle$$

$\uparrow$

<u>Lemma</u>: Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ und $v : U \to \mathbb{R}^3$ diff.bar:

$$\langle \operatorname{rot} v(x), a \times b \rangle = \left\langle \left(Dv(x) - Dv(x)^T \right) a, b \right\rangle$$

<u>Schritt 3</u>: Orientierung auf A

$$n(\phi(x)) = \pm \frac{\partial_1 \phi(x) \times \partial_2 \phi(x)}{|\partial_1 \phi(x) \times \partial_2 \phi(x)|}$$

o.B.d.A. pos. Vorzeichen

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(x), n(x) \rangle \, dS(x) = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), n(\phi(x)) \rangle \underbrace{\sqrt{g^\phi(x)}}_{= |\partial_1 \phi(x) \times \partial_2 \phi(x)|} \, dx$$

vgl. S.31

$$= \int_\Omega \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), \partial_1 \phi(x) \times \partial_2 \phi(x) \rangle \, dx$$

$\square$

Nachtrag: Rotation als antisymm. Teil der Jacobi-Matrix

Für $n=3$ gilt: $Dv(x) - Dv(x)^T = \begin{pmatrix} 0 & -(\operatorname{rot} v)_3(x) & (\operatorname{rot} v)_2(x) \\ (\operatorname{rot} v)_3(x) & 0 & -(\operatorname{rot} v)_1(x) \\ -(\operatorname{rot} v)_2(x) & (\operatorname{rot} v)_1(x) & 0 \end{pmatrix}$

Somit: $\operatorname{rot} v(x) \times a = \left(Dv(x) - Dv(x)^T\right) a \quad \forall a \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \langle \operatorname{rot} v(x), a \times b \rangle = \langle \operatorname{rot} v(x) \times a, b \rangle = \langle \left(Dv(x) - Dv(x)^T\right) a, b \rangle$

Dies beweist Lemma S. 61.

Allgemeiner gilt für diff.bare VF $v: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$:

$Dv(x) - Dv(x)^T$ hat $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Komponenten.

Diese Komponenten werden mit $\operatorname{rot} v$ identifiziert.

Bsp $n=2$: $\operatorname{rot} v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ ist Skalar

$n=3$: $\operatorname{rot} v$ hat 3 Komponenten

$n=4$: — 6 —

Folgerung aus Stokes im $\mathbb{R}^2$: Cauchyscher Integralsatz

Betrachte $u, v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, welche

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}} \qquad (CR)$$

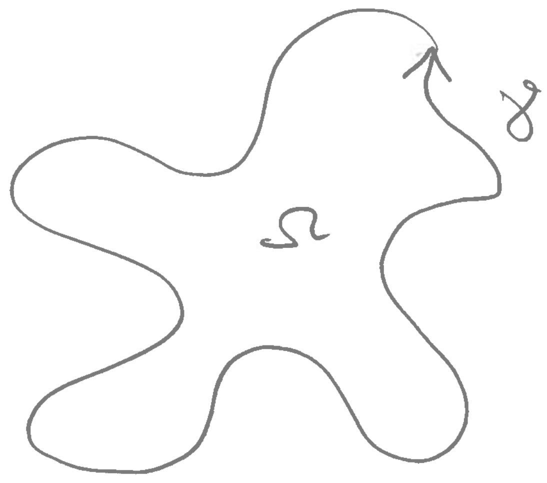
auf U erfüllen.

Wirbelfreie Vektorfelder $w, \tilde{w} : U \to \mathbb{R}^2$: $\quad \operatorname{rot} w = \operatorname{rot} \tilde{w} = 0$

$$w = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

Für $\Omega \subset U$ wie im Satz von Stokes mit geschlossener Randkurve $\gamma : [0,1] \to U$, d.h. $\partial\Omega = \gamma([0,1])$, gilt:

$$\oint_\gamma \overset{(\sim)}{w} \cdot d\gamma = \int_0^1 \overset{(\sim)}{w}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \underset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega \operatorname{rot} \overset{(\sim)}{w}(x)\, dx = 0$$



Komplexe Formulierung dieses Sachverhalts:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^2$$

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

<u>Satz</u> (Cauchyscher Integralsatz – 1. Version)

Seien $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ offen, welche CR-Gleichungen auf $\mathcal{U}$ erfüllen, und

$$\boxed{f(z) := u(x,y) + i\, v(x,y)} \quad , \; z = x + iy$$

Dann gilt für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \left(\dot\gamma_1(t) + i\, \dot\gamma_2(t) \right) dt = 0$$

<u>Beweis:</u> Multiplikation komplexer Zahlen: $f = f_1 + i f_2$

$$\dot\gamma = \dot\gamma_1 + i\, \dot\gamma_2$$

$$\Rightarrow \quad f \cdot \dot\gamma = f_1 \dot\gamma_1 - f_2 \dot\gamma_2 + i \left(f_1 \dot\gamma_2 + f_2 \dot\gamma_1 \right)$$

$$= w \cdot \dot\gamma + i\, \tilde w \cdot \dot\gamma$$

Integration und Rechnung S. 63 ergibt Beh. □