25. Integralsätze von Gauß & Stokes

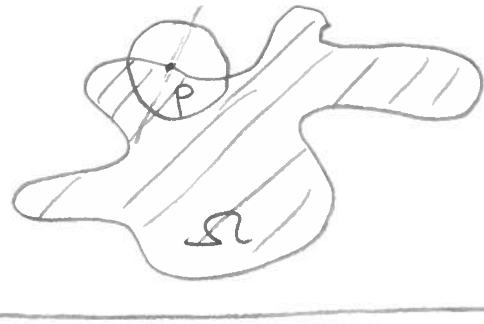
Lernziele:
- Satz von Gauß im $\mathbb{R}^n$
- Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$
- Anwendungen der Integralsätze

Lit: Kap. 14 in: C. Blatter, Analysis 2, Springer 1992

25.1. Satz von Gauß

Def: Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt $\mathcal{C}^1$-Rand, genau dann wenn für alle $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und eine Fkt $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ existieren mit $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}$ und

$$\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) = 0\}$$
$$\Omega \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) < 0\}$$

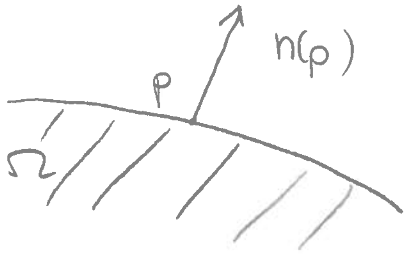


Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Anschaulich: $\partial\Omega$ ist lokal ein Graph und Ω "liegt auf einer Seite".
2. $\partial\Omega$ ist $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF!

   Normalenraum $N_p\partial\Omega = \operatorname{span}\{\nabla f(p)\}$ (vgl. Kap 17)

Der Vektor $\boxed{n(p) := \dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}}$ $\in \mathbb{R}^n$ erfüllt für $p \in \partial\Omega$:



i) $|n(p)| = 1$

ii) $n(p) \in N_p \partial\Omega$

iii) $p + \varepsilon n(p) \notin \Omega$ für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

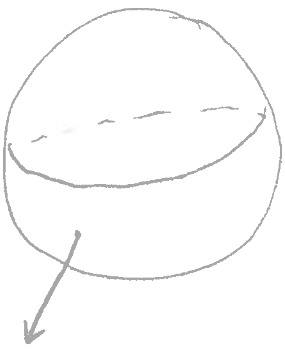
Begr. zu iii): Satz von Taylor:

$$f(p + \varepsilon n(p)) = f(p) + \varepsilon n(p) \cdot \nabla f(p) + o(\varepsilon)$$
$$= \varepsilon |\nabla f(p)| + o(\varepsilon) > 0. \quad \square$$

Def: Obiger Vektor heißt äußere Normale an $\partial\Omega$ in p

Beispiele: 1. $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ hat C^1-Rand

$$\partial\Omega = \partial B_1(0) = S^2$$



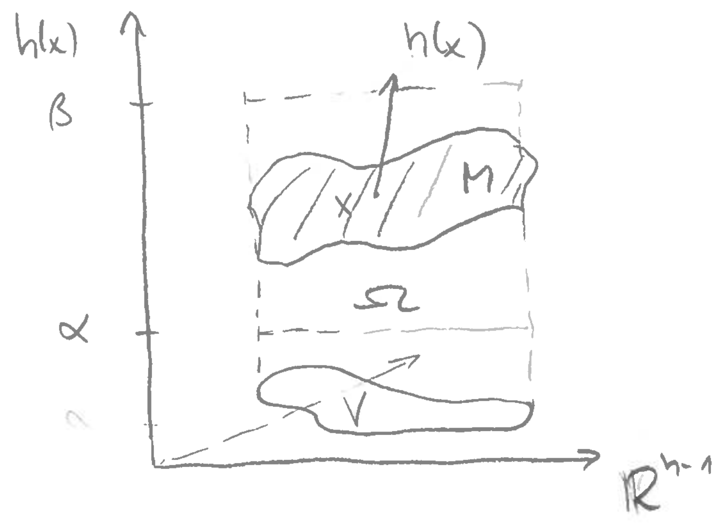
Hier: $f(x) = |x|^2 - 1$, $\nabla f(x) = 2x \neq 0$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) < 0\}$ $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

$n(x) = x$. (äußere Normale)

2. $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt, $h \in C^1(U, \mathbb{R})$, $M = \text{Graph } h$

$$\Omega := \{(x', x_n) \in V \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x') \wedge x_n \in (\alpha, \beta)\}$$



Ω hat i.A. keinen $\mathcal{C}^1$-Rand. Der obere "Deckel" M ist aber $\mathcal{C}^1$-UMF, die durch Fkt

$$f(x',x_n) := x_n - h(x')$$

beschrieben wird:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0 \wedge x_n \in (\alpha,\beta)\}$$

Äußere Normale auf M in $x = (x', x_n) \in M$:

$$\boxed{n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(x') \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Spezialfälle des Satzes von Gauß:

1. Quader $Q = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$:

Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ mit $U \supset Q$ offen. Dann gilt:

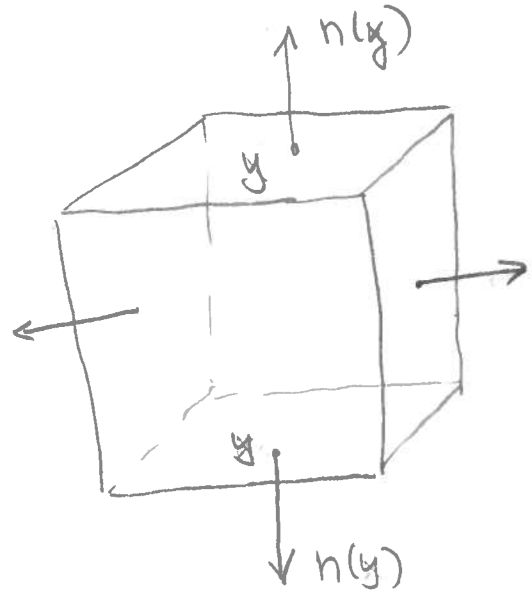
$$\int_Q \partial_n f(x)\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{Q'} \left(\int_{a_n}^{b_n} \partial_n f(x)\, dx_n \right) dx'$$

$$Q' := [a_1,b_1] \times \dots \times [a_{n-1},b_{n-1}].$$

HDI

$$= \int_{Q'} f(x', b_n)\, dx' - \int_{Q'} f(x', a_n)\, dx'$$

$$= \int_{\partial Q} f(y)\, n_n(y)\, dS(y)$$



Äußere Normale $n : \partial Q \to \mathbb{R}^n$

Analog für alle anderen Komponenten $j = 1, \dots, n$:

$$\int_Q \partial_j f(x)\, dx = \int_{\partial Q} f(x)\, n_j(x)\, dS(x) \qquad (*)$$

Durch Summation über j für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$:

$$\boxed{\int_Q \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial Q} \underbrace{\langle v(y), n(y) \rangle}_{:= v(x) \cdot n(x)}\, dS(y)}$$

Skalarprodukt

Bemerkung: Für supp f kompakt in V offen, $V \subset Q$

$$\forall j = 1 \dots n: \quad \int_V \partial_j f(x)\, dx = 0. \qquad (**)$$

2. Situation aus Beispiel 2:

Für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}^1(V \times (\alpha,\beta), \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} v_j$ kompakte Teilmenge von $V \times (\alpha,\beta)$ für alle $j = 1 \dots n$ gilt:

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_M \langle v(y), n(y) \rangle\, dS(y)} \qquad (***)$$

Beweis: $\operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_j v_j)(x) + (\partial_n v_n)(x)$

1. $$\int_\Omega \partial_n v_n(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Normal-} \\ \text{bereich}}}{=} \int_V \underbrace{\left(\int_\alpha^{h(x')} (\partial_n v_n)(x'; x_n)\, dx_n \right)}_{= v_n(x'; h(x'))} dx'$$

$$= \int_V v_n(x'; h(x')) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} \underbrace{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx'}_{\substack{\text{Oberflächenmaß auf } M \\ \text{vgl. S. 34 } (dS)}}$$

$$= \int_M v_n(y)\, n_n(y)\, dS(y)$$

2. Betrachte $g(x') := \int_\alpha^{h(x')} v_j(x', x_n)\, dx'$, $x' \in V$, $j = 1, \dots, n-1$

i) $\operatorname{supp} g$ ist kompakte Teilmenge von V

ii) Parameterdifferentiation: (Ana 2)

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x') = v_j(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{h(x')} \partial_j v_j(x', x_n)\, dx_n$$

Aus (**) S.42: $\quad 0 = \int_V \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')\, dx' =$

$$= -\int_V v_j(x', h(x'))\, \underbrace{\frac{-\partial_j h(x')}{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}}}_{= \text{ äußere Normale}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}\, dx'}_{\text{Oberflmaß}} + \int_V \left(\int_\alpha^{h(x')} \partial_j v_j(x', x_n)\, dx_n \right) dx'$$

$$= -\int_M v_j(y)\, n_j(y)\, dS(y) + \int_\Omega (\partial_j v_j)(x)\, dx$$

Somit: $\quad \int_\Omega (\partial_j v_j)(x)\, dx = \int_M v_j(y)\, n_j(y)\, dS(y)$ $\quad \square$

Für allgemeine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand zerlegt man das Integral mittels C^∞-Zerlegung der Eins

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \sum_j \int \operatorname{div}(X_j v)(x)\, dx$$

- Innenbereich $x_j \in \Omega$: Null wg (*).
- Rand $x_j \in \partial\Omega$: wie (***).

$(\mathcal{U}_j)_{j=1..N}$ offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$ mit (X_j) C^∞-Zerl.

Satz (Gauß) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand. Für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ mit $\overline{\Omega} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y) \rangle\, dS(y)$$

wobei $n(y)$ äußere Normale an $\partial\Omega$ in y ist.

Ergänzungen & Bemerkungen:

1. Verallgemeinerung für Ω mit "Ecken, Kanten" möglich (vgl Ω = Quader).

2. Notation & Interpretation:

$$\int_{\partial\Omega} \langle v(y), \underbrace{dS(y)}_{= n(y)\, dS(y)} \rangle := \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y) \rangle\, dS(y)$$

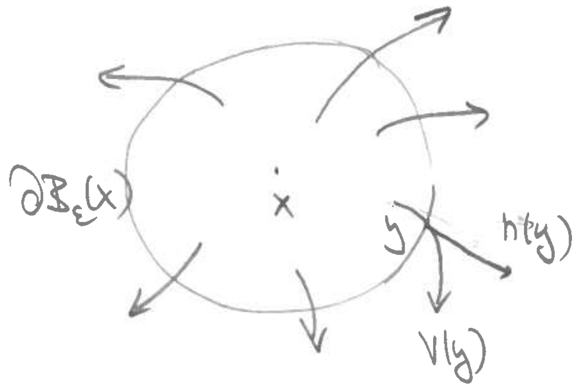
Fluß des Vektorfelds v durch $\partial\Omega$

Speziell: $\Omega = B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < \varepsilon \}$

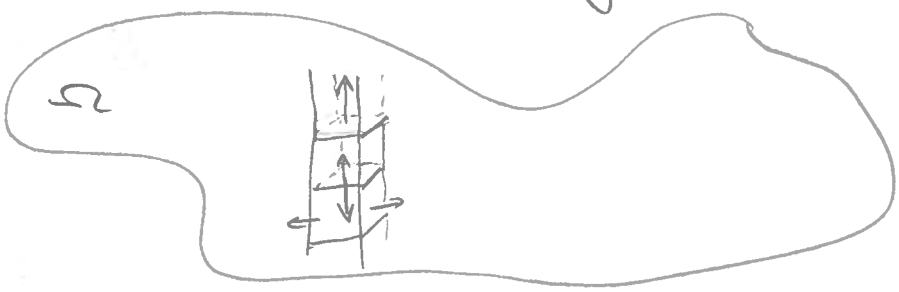
$$\partial\Omega = \partial B_\varepsilon(x).$$

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{div} v(x) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} \operatorname{div} v(y)\, dy \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x))} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \langle v(y), n(y) \rangle \, dS(y)\end{aligned}}$$

Divergenz ist Quellstärke!

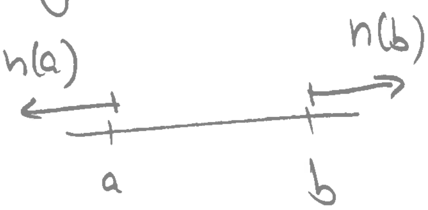


3. Anschauliche Begründung:



Flüsse benachbarter innerer Würfel heben sich weg.
Nur Oberflächenterme bleiben übrig!

4. Spezialfall $n=1$: HDI



$$\int_{(a,b)} v'(x)\, dx \underset{v'(x) = \operatorname{div} v(x)}{=} \int_{(a,b)} \operatorname{div} v(x)\, dx \underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial(a,b)} \langle v(y), n(y) \rangle \, dS(y)$$

$$= v(b) - v(a).$$

25.2. Partielle Integration & Formel von Green:

<u>Lemma:</u> Für $\Omega \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ wie im Satz von Gauß und $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$\int_\Omega (\partial_j f)(x)\, g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(y) g(y)\, n_j(y)\, dS(y) - \int_\Omega f(x) (\partial_j g(x))\, dx$$

<u>Beweisidee:</u> Betrachte Vektorfeld $v(x) := f(x) g(x) e_j$, $x \in \mathcal{U}$

· $\operatorname{div} v(x) = \partial_j (f(x) g(x)) = (\partial_j f)(x)\, g(x) + f(x)\, \partial_j g(x)$

Integration über Ω & Satz von Gauß liefern Beh. □

<u>Satz</u> (Formel von Green) Für $\Omega \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ wie oben und $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ gilt:

$$\int_\Omega f(x) (\Delta g)(x)\, dx = - \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle\, dx + \int_{\partial\Omega} f(y) (\partial_n g)(y)\, dS(y)$$

wobei $(\partial_n g)(y) := \langle \nabla g(y), n(y) \rangle$ die Richtungsableitung von g in Richtung äußere Normale ist.

<u>Beweisidee:</u> partielle Integration! Übung!

25.3. Anwendung zu Poisson bzw. Laplace Gleichung.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$)

Poisson Gleichung: $\boxed{\Delta \Phi(x) = g(x), \quad x \in \Omega}$

Gesuchte Funktion: $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$, $\overline{\Omega} \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

mit 1. Dirichlet Randproblem $\quad g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$

$$\boxed{\phi(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega}$$

oder 2. Neumann Randproblem $\quad h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$

$$\boxed{\nabla\phi(x) = h(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega}$$

Satz: Unter obigen Vor. besitzt das Dirichlet Randwertproblem genau eine Lösung $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Je zwei Lösungen des Neumann Randwertproblems $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ erfüllen $\phi_1 = \phi_2 + \text{const}$.

Beweis: Angenommen es gibt 2 Lösungen ϕ_1, ϕ_2

Dann löst $\psi := \phi_1 - \phi_2 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ die Laplace Gleichung

$$\Delta\psi = 0$$

Aus Greenschen Formel: $(f = g = \psi)$

$$\int_\Omega \Big[|\nabla\psi(x)|^2 + \psi(x) \underbrace{\Delta\psi(x)}_{=0} \Big] dx = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \psi(y) \langle \nabla\psi(y), n(y) \rangle \, dS(y)}_{=0}$$

entweder $\psi(y) = 0$ oder $\nabla\psi(y) = 0$.

$\Rightarrow \int_\Omega |\nabla\psi(x)|^2 dx = 0$. Wegen Stetigkeit von $|\nabla\psi(x)|$ folgt daraus $\nabla\psi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Dirichlet Fall: $\psi|_{\partial\Omega} = 0 \wedge \nabla\psi = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

Neumann Fall: $\nabla\psi|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + \text{const}$.

$\square$

Fundamentallösung der Laplace Gleichung im $\mathbb{R}^n$

Def: Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist definiert

$$G(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \dfrac{1}{|x|^{n-1}}, & n \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \log|x|, & n = 2 \end{cases}$$

die Greensche Funktion der Laplace Gleichung.

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: (Übung!)

$$\nabla G(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \frac{x}{|x|^n} \quad ; \quad \boxed{\Delta G(x) = 0}$$

Satz (Lösung der Poisson Gleichung im $\mathbb{R}^n$)

Sei $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \rho$ kompakt. Dann definiert

$$\Phi(x) := \int G(x-y)\, \rho(y)\, dy \,, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eine Funktion $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta \Phi(x) = \rho(x)$.

Beweisskizze: Die Fkt $y \mapsto G(x-y)\rho(y)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ absolut integrierbar über $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\Phi(x) \underset{\text{Substitution}}{=} \int \rho(x-y)\, G(y)\, dy.$$

Man kann zeigen: $\quad j,k = 1, \dots, n$

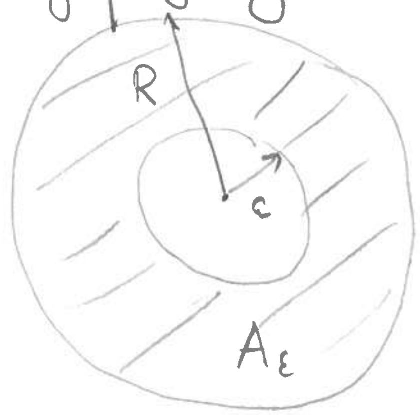
$$\partial_j \partial_k \Phi(x) = \int (\partial_j \partial_k \rho)(x-y)\, G(y)\, dy$$

Insbesondere $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt:

$$\Delta\Phi(x) = \int (\Delta\rho)(x-y)\, G(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\, G(y)\, dy$$

wobei $A_\varepsilon := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < |y| < R \}$ mit R groß genug, so daß

$\rho(x-y) = 0 \quad \forall\, |y| > \frac{R}{2}$.



Da A_ε offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand

$\partial A_\varepsilon = \partial B_R(0) \cup \partial B_\varepsilon(0)$

und $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon/2}(0))$ folgt aus Greenscher Formel:

$$\int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\, G(y)\, dy - \int_{A_\varepsilon} \rho(x-y) \underbrace{(\Delta G)(y)}_{=0}\, dy =$$

$$= \int_{\partial A_\varepsilon} \left[G(y) \langle n(y), \nabla_y \rho(x-y) \rangle - \rho(x-y) \langle n(y), \nabla G(y) \rangle \right] dS(y)$$

1. Beiträge von $\partial B_R(0)$ verschwinden, da $\rho(x-y) = 0$ und $\nabla_y \rho(x-y) = 0$ für alle $y \in \partial B_R(0)$.

2. Beiträge von $\partial B_\varepsilon(0)$:

i) $$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} G(y) \langle n(y), \nabla_y \rho(x-y) \rangle\, dS(y) \right| \leq \underbrace{\sup_{|y|=\varepsilon} |\nabla_y \rho(x-y)|}_{=: C(x)} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |G(y)|\, dS(y)$$

$$\leq C(x) \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\, \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \dfrac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_\varepsilon(0))}{\varepsilon^{n-2}} & ; \; n \neq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} |\log \varepsilon|\, 4\pi\varepsilon & ; \; n = 2 \end{cases} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} 0$$

ii) $$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho(x-y) \underbrace{\langle n(y), \nabla G(y)\rangle}_{= -\left\langle \frac{y}{|y|}, \frac{y}{|y|^n}\right\rangle \cdot \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}} dS(y) = -\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\rho(x-y)}{|y|^{n-1}} dS(y)$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_1(0)} \rho(x-\varepsilon y)\, dS(y) = (*)$$

Satz von Taylor $\rho(x-\varepsilon y) = \rho(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$

$\Rightarrow \quad (*) = -\rho(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$

Fazit: $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} \Delta\rho(x-y)\, G(y)\, dy = \rho(x). \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$\square$

Bemerkung: Im Rahmen der Distributionstheorie kann man zeigen: $\Delta G(x) = \delta(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$

Delta Distribution