23. Oberflächenintegrale

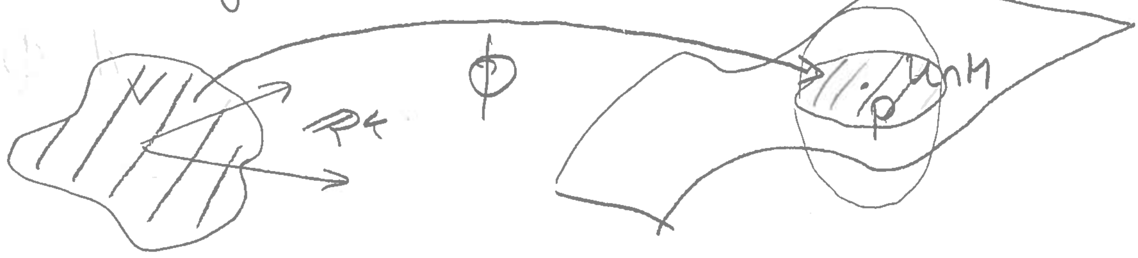
<ins>Lernziele</ins>: 1. Oberflächenintegral einer k-dim. UMF $M \subset \mathbb{R}^n$
2. Berechnung in Spezialfällen
($k=2, n=3$; M Graph; $M=S^n$)

<ins>Lit.</ins>: · Kap 20 in: R. Wüst, Math. für Physiker & Math., Wiley

23.1. Motivation & Definition

<ins>Erinnerung Kap 17</ins>:

- $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF, wenn es für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und Homöomorphismus $\phi: V \to U \cap M$ gibt mit $\phi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$ und Rang $D\phi(x) = k \;\; \forall x \in V$.



- ϕ heißt Karte.
- Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann kann $V \subset \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt gewählt werden, was wir im Folgenden stets annehmen werden.

<ins>Ziel</ins>: Definition eines natürlichen Oberflächenmaßes dS auf kompakten k-dim UMF $M \subset \mathbb{R}^n$

Definition des Oberflächenintegrals $\int_M f(x)\, dS(x)$

Bereits bekannte Spezialfälle

- $k=1,\ f=1$: Nicht überschneidende Kurve

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

$\gamma(I)$

$$\int_{\gamma(I)} dS(x) = \text{Länge von } \gamma(I)$$

- $k=n,\ f=1$: Für $M \subset \mathbb{R}^n$ J-meßbar $\int_M dS(x) = \mathrm{vol}(M)$

Beachte: Eine k-dim. UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ hat für $k<n$ ein n-dim Volumen 0. Wir wollen ihr ein k-dim. Volumen zuordnen.

Zunächst betrachten wir k-dim. Volumen niederdimensionaler

k-Parallelotope: $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ lin. unabhängig

$$\boxed{\begin{aligned} P(v_1 \dots v_k) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1 \dots \lambda_k \in [0,1] : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k\} \\ &= A\,[0,1]^k \end{aligned}}$$

mit $A = (v_1 \dots v_k)$ $n \times k$ Matrix

v_2

$P(v_1, v_2)$ v_1

<u>Volumen für k=n:</u> $\mathrm{Vol}_n P(v_1, \ldots v_n) = |\det A| = \sqrt{\det A^T A}$

Spezialfall n=3: $\mathrm{Vol}_3 P(v_1 \ldots v_3) = |(v_1 \times v_2) \cdot v_3|$ Spatprod.

<u>Volumen für k<n:</u>

Spezialfall $v_j = \begin{pmatrix} w_j \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $w_j \in \mathbb{R}^k$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } B = (w_1 \ldots w_k) \in \mathrm{Mat}(k, \mathbb{R})$$

$$\mathrm{Vol}_k P(v_1 \ldots v_k) = |\det B| = \sqrt{\det B^T B} = \sqrt{\det A^T A}$$

Allgemeiner Fall $\exists O \in O(n)$ mit

$$OA = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } B \text{ wie oben}$$

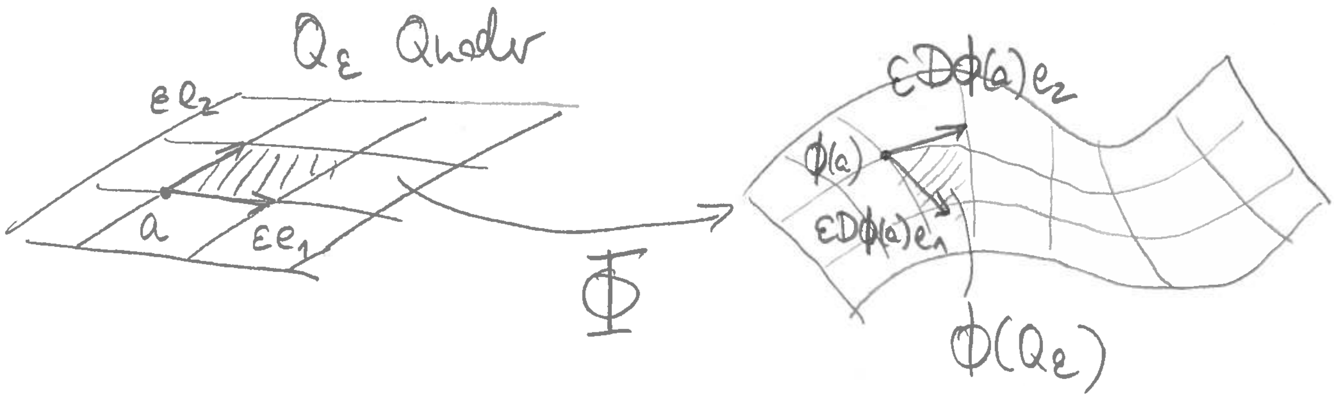
$$\mathrm{Vol}_k P(v_1 \ldots v_k) = |\det B| = \sqrt{\det B^T B} = \sqrt{\det (OA)^T OA}$$
$$= \sqrt{\det A^T A}.$$

<u>Def:</u> k-dimensionales Volumen des von $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops:

$$\mathrm{Vol}_k P(v_1 \ldots v_k) = \sqrt{\det A^T A}$$

mit $A = (v_1 \ldots v_k)$ $n \times k$ Matrix.

Volumen des Bildes eines Quaders unter Karte



Für genügend kleine Quader $Q_\varepsilon = a + P(\varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_k)$

$$\underset{\varepsilon>0 \text{ klein}}{\Phi(Q_\varepsilon) \approx} \Phi(a) + P(\varepsilon D\phi(a)e_1, \dots, \varepsilon D\phi(a)e_k)$$

$$\mathrm{vol}_k \Phi(Q_\varepsilon) \approx \mathrm{vol}_k P(\varepsilon D\phi(a)e_1, \dots, \varepsilon D\phi(a)e_k)$$
$$= \underbrace{\varepsilon^k}_{\mathrm{Vol}_k(Q_\varepsilon)} \cdot \sqrt{\det D\phi(a)^T D\phi(a)}$$

Def: Für eine k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine Karte $\Phi : V \to U$ heißt $g^\Phi(u) := \det(D\phi(u)^T D\phi(u))$ die Gramsche Determinante bei $u \in V$.

Bem: $g^\Phi(u)$ ist Determinante des metrischen Tensors von M und Φ bei $u \in V$.

Def (Oberflächenintegral über eine Karte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF und $\phi: V \to U$ Karte

Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt über $\Phi(V) \subset M$ bzgl. Φ absolut integrierbar, falls $V \ni u \mapsto f(\Phi(u))\sqrt{g^{\Phi}(u)}$ über V absolut integrierbar ist und man setzt:

$$\boxed{\int_{\Phi(V)} f(x)\, dS(x) := \int_V f(\Phi(u))\sqrt{g^{\Phi}(u)}\, du}$$

Bem. & Ergänzungen: 1. $\mathrm{Vol}_k\, \Phi(V) := \int_{\Phi(V)} dS(x)$ (k-dim. Vol.)

2. Oberflächenintegral ist Kartenunabhängig, d.h. für Karte $\psi: \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit $\psi(\tilde{V}) = \Phi(V)$ gilt:

$$\boxed{\int_V f(\Phi(u))\sqrt{g^{\Phi}(u)}\, du = \int_{\tilde{V}} f(\psi(\tilde{u}))\sqrt{g^{\psi}(\tilde{u})}\, d\tilde{u}}$$

(Beweis mit Transformationssatz S.25)

3. Für $k=n$ ist Def konsistent mit Trafoformel

4. Anschaulich: "$dS(x)$ infinitesimales Oberfl. element"

23.2. Spezialfälle und Beispiele

Für $n=3$ und $k=2$:

Lemma: Für $\Phi: V \to \mathcal{U}$ Karte mit $V \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boxed{\sqrt{g^{\Phi}(u)} = \left| (\partial_1 \phi)(u) \times (\partial_2 \phi)(u) \right| \quad \forall\, u \in V}$$

Beweis: $D\phi(u) = \left(\partial_1 \phi(u)\ \partial_2 \phi(u)\right)$

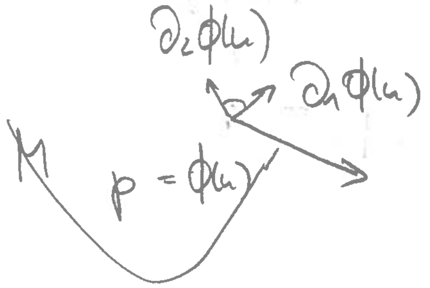
Skalarprodukt

$$\Rightarrow \quad D\phi(u)^T D\phi(u) = \begin{pmatrix} |\partial_1 \phi(u)|^2 & \partial_1\phi(u) \cdot \partial_2 \phi(u) \\ \partial_2 \phi(u) \cdot \partial_1 \phi(u) & |\partial_2 \phi(u)|^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{g^{\phi}(u)} = |\partial_1 \phi(u)|\,|\partial_2 \phi(u)| \sqrt{1 - \cos^2\left(\sphericalangle\left(\partial_1\phi(u), \partial_2 \phi(u)\right)\right)}$$

$$= \text{r.S.} \quad \square$$

Geometrische Interpretation (vgl. Ana 2)



- $\operatorname{span}\{\partial_1 \phi(u), \partial_2 \phi(u)\} = T_{\phi(u)} M$

  Tangentialraum an $p \in M$

- $\operatorname{span}\{\partial_1 \phi(u) \times \partial_2 \phi(u)\} = N_{\phi(u)} M$ Normalenraum an $p \in M$

Bsp: $M = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3 \wedge 0 \le x_3 \le 1 \}$

$$\phi: V \to \mathcal{U}, \quad \phi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1^2 + u_2^2 \end{pmatrix}, \quad V = \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < 1 \}$$

$$D\phi(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u_1 & 2u_2 \end{pmatrix} = \left(\partial_1\phi(u) \;\; \partial_2\phi(u)\right)$$

$$\Rightarrow \quad g^{\phi}(u) = \det \begin{pmatrix} 1+4u_1^2 & 4u_1u_2 \\ 4u_1u_2 & 1+4u_2^2 \end{pmatrix} = 1+4(u_1^2+u_2^2)$$

Fläche von $\Phi(V) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2 = x_3 \wedge 0 \leq x_3 < 1\}$

$$\mathrm{Vol}_2\, \phi(V) = \int_{\phi(V)} dS(x) = \int_V \sqrt{g^{\Phi}(u)}\, du$$

$$= \int_V \sqrt{1+4(u_1^2+u_2^2)}\, d(u_1,u_2)$$

Polarkoord

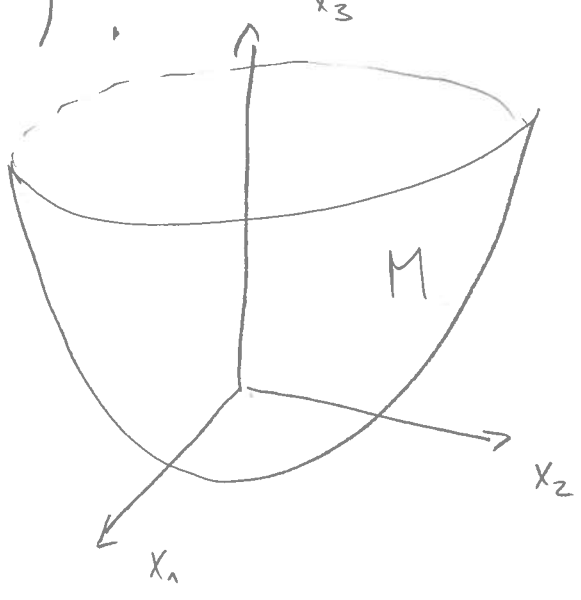
$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\, r\,dr$$

Subst
$t = 1+4r^2$
$dt = 8r\,dr$

$$= \frac{2\pi}{8} \int_1^5 \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right).$$

Paraboloidstumpf

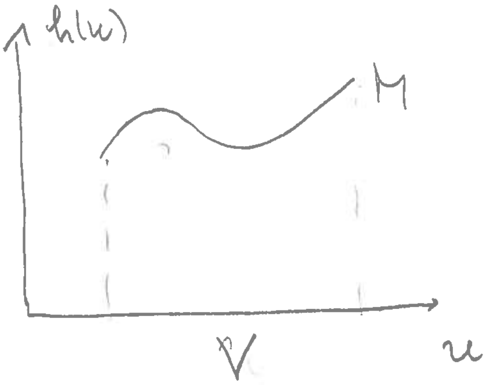


Erinnerung: Analysis 2 (H.9.2)

Für $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $h \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R})$ ist

$$\boxed{M := \text{Graph } h := \{(u, h(u)) \mid u \in V\} \subset \mathbb{R}^n}$$

eine $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF im $\mathbb{R}^n$.



- Eine Karte mit $M = \Phi(V)$ ist:

$$\Phi : V \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(u) := \begin{pmatrix} u \\ h(u) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad D\Phi(u) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} \\ Dh(u) \end{pmatrix} \qquad \forall u \in V$$

- Gramsche Determinante: $g^{\Phi}(u) = \det\left(D\Phi(u)^T D\Phi(u)\right)$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1_{n-1} & \nabla h(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{n-1} \\ \nabla h(u)^T \end{pmatrix}\right]$$

$$= \det\left[1_{n-1} + \nabla h(u) \nabla h(u)^T\right] = 1 + |\nabla h(u)|^2$$

Lemma: $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $a a^T := \begin{pmatrix} a_1 a_1 & \cdots & a_1 a_m \\ \vdots & & \\ a_m a_1 & & a_m a_m \end{pmatrix}$

- Eigenwerte von $A := 1 + a a^T$:

$$1 \ (m-1 \text{ fach}) \quad \text{und} \quad 1 + |a|^2 \ (1 \text{ fach})$$

- $\det(1 + a a^T) = 1 + |a|^2$

Beweis Lin. Alg. (Übung).

Damit ist bewiesen:

Satz (Integration über Funktionsgraphen)

Für $h \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $M := \text{Graph } h$ beschränkt gilt für $f : M \to \mathbb{R}$ absolut intbar über M:

$$\int_M f(x)\, dS(x) = \int_{\mathcal{U}} f(u, h(u)) \sqrt{1 + |\nabla h(u)|^2}\, du$$

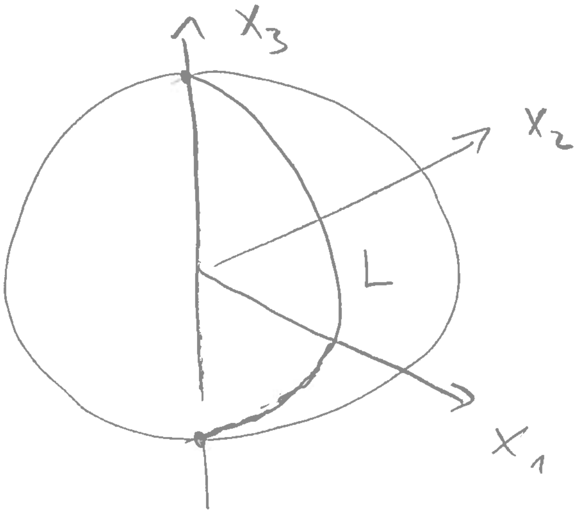
23.3. Oberflächenintegral für mehr als eine Karte

Beispiel: Oberfläche der Einheitsphäre

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

- kompakte $\mathcal{C}^1$-UMF
- Es gibt keine Karte $\Phi : V \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so daß $\phi(V) = S^n$. Wir benötigen mindestens 2 Karten für einen Atlas von S^n.

Spezialfall $n=2$: $\phi: \underbrace{(0,\pi)\times(0,2\pi)}_{=:V} \to \mathbb{R}^3$



$$\phi(\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

$\phi(V) = S^2 \setminus L$ mit

$$L := \left\{ \begin{pmatrix}\sin\vartheta\\ 0\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta\in[0,\pi] \right\}$$

$$\mathrm{vol}_2\, \phi(V) = \int_V \sqrt{g^\phi(\vartheta,\varphi)}\, d(\vartheta,\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta\right) d\varphi$$

$$= 4\pi \quad \left[= \mathrm{vol}_2(S^2) \right]$$

Übung: $g^\phi(\vartheta,\varphi) = \sin^2\vartheta$

Die Menge $L \subset S^2$ ist ein Beispiel einer 2-dim. Nullmenge.

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. C^1-UMF.

Man nennt $N \subset M$ eine *k-dim. Nullmenge von M*, falls N endliche Vereinigung von Mengen der Form $N_j = \Phi_j(L_j)$ ist, wobei $\phi_j : V_j \to U_j$ Karte von M und $L_j \subset V_j$ eine J-Nullmenge im $\mathbb{R}^k$ ist.

1. Verallgemeinerung des Oberflächenintegrals für kompakte k-dim. C^1-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$, welche bis auf eine k-dim. Nullmenge $N \subset M$ durch eine Karte $\phi: V \to U$ mit $\phi(V) = M \setminus N$ beschrieben werden:

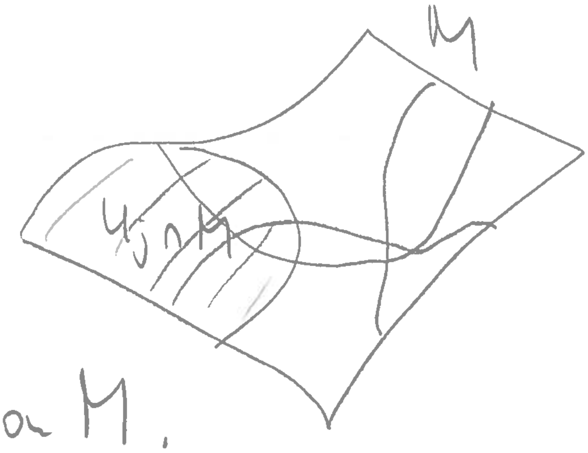
$$\boxed{\int_M f(x)\, dS(x) := \int_{\phi(V)} f(x)\, dS(x)} \qquad (*)$$

für alle stetigen $f: M \to \mathbb{R}$.

2. Allgemein für kompakte k-dim. C^1-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$:

Fakt: Jede kompakte UMF M gibt es einen endlichen Atlas $(\Phi_j)_{j=1,\dots,N}$, $\phi_j: V_j \to U_j$:

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{N} (U_j \cap M)$$

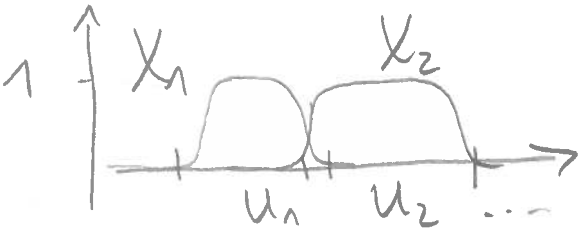


- $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ bildet eine offene Überdeckung von M.

Def: Sei $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ offene Überdeckung von $M \subset \mathbb{R}^n$

Eine Familie $(\chi_j)_{j=1\dots N}$ von Fktn $\chi_j : M \to \mathbb{R}$ heißt C^∞-Zerlegung der Eins bzgl. $(U_j)_{j=1..N}$ falls

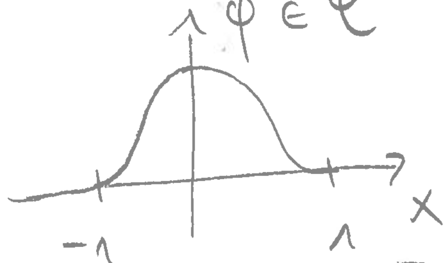
1. $0 \le \chi_j \le 1$
2. $\sum_{j=1}^{N} \chi_j(x) = 1 \quad \forall x \in M$
3. $\operatorname{supp} \chi_j = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \chi_j(x) \neq 0\}} \subset U_j$



"geglättete Einsen"

Fakt: Für jede kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ und offene Überdeckung existiert eine solche C^∞-Zerlegung der Eins

Beweisidee: • $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\{-\frac{1}{1-|x|^2}\}, & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



$\operatorname{supp} \varphi = B_1(0)$

• Konstruiere χ_j's durch Skalierung und Verschiebung.

Def: (Oberflächenintegral - allgemeiner Fall)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakte, k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF.

Eine Fkt $f: M \to \mathbb{R}$ heißt absolut integrierbar über M falls es einen adl. Atlas $(\Phi_j)_{j=1,..N}$ gibt, so daß f abs. integrierbar über $\phi_j(V_j)$ bzgl ϕ_j für alle $j = 1..N$ ist.

In diesem Fall setzt man

$$\boxed{\int_M f(x)\, dS(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\phi_j(V_j)} f(x)\, \chi_j(x)\, dS(x)}$$

wobei $(\chi_j)_{j=1,..N}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung der Eins bzgl. $(U_j)_{j=1...N}$ ist.

Bem:
- Hauptsächlich von theor. Interesse
- Liefert (*) im Spezialfall