# 22.3. Transformationsformel:

Transformationsverhalten des Volumens von beschränkten, J-meßbaren $A \subset \mathbb{R}^n$:

i) Translationsinvarianz: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\mathrm{vol}(x + A) = \mathrm{vol}(A)}$$

ii) Skalierungsverhalten: $\lambda \geq 0$

$$\mathrm{vol}(\lambda A) = \lambda^n \, \mathrm{vol}(A)$$

Allgemeiner: Lineare Abb. $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\boxed{\mathrm{vol}(\Lambda(A)) = \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j\right) \mathrm{vol}(A) = \det \Lambda \; \mathrm{vol}(A)}$$

iii) Rotationsinvarianz: $O \in O(n) := \{ O \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid O^T O = 1 \}$

$$\boxed{\mathrm{vol}(O(A)) = \mathrm{vol}(A)}$$

Eigenschaften i)-iii): elementar für Quader und folgen durch Grenzübergang für A aus Zerlegung.

Allgemeiner: affin lineare Abbildungen zerlegen wir in Translationen und lineare Abb. M.

Aus linearen Algebra:

**Lemma** (Singulärwertzerlegung) Für jede $n\times m$-Matrix $M$ gibt es $U\in O(n)$, $V\in O(m)$ und $\Lambda$ mit $\Lambda_{k\ell}=\begin{cases} s_k\geq 0 & k=\ell\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

so daß: $$M=U\Lambda V$$

**Bem:** $(s_k^2)$ sind Eigenwerte von $M^TM\geq 0$.

**Satz** (Trafoverhalten unter lin. Abbildungen)

Sei $M\in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ und $A\subset\mathbb{R}^n$ beschränkt, J-meßbar.

Dann: $$\mathrm{vol}(M(A))=|\det M|\,\mathrm{vol}(A)$$

**Beweis:** $$\text{r.S.} \overset{\text{Lemma}}{=} \mathrm{vol}(U\Lambda V(A)) \overset{\text{iii)}}{=} \mathrm{vol}(\Lambda V(A)) \overset{\text{ii)}}{=} \det(\Lambda)\,\mathrm{vol}(V(A)) \overset{\text{iii)}}{=} \det(\Lambda)\,\mathrm{vol}(A) = \text{l.S.}$$

- $\det(M)=\det(U)\det\Lambda\det(V)$
- $\det(O)\in\{\pm1\}$ für $O\in O(n)$ $\square$


M(Q) Parallelotop

<u>Erinnerung an Analysis 2</u>: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$

i) $g$ ist $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $:\Longleftrightarrow$ $g, g^{-1} \in \mathcal{C}^1$

ii) $g$ ist lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $:\Longleftrightarrow$

$\forall x \in \mathcal{U}: \exists$ Umgebung $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}$: $f|_{\mathcal{U}_x}: \mathcal{U}_x \to f(\mathcal{U}_x)$ $\mathcal{C}^1$-Diffeo.

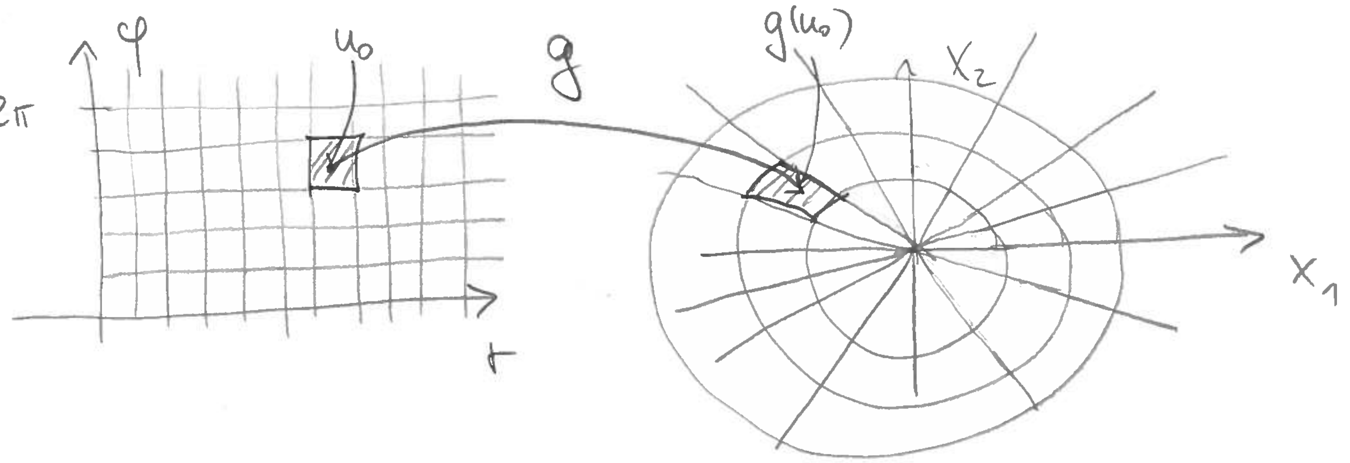
iii) Satz zur Umkehrfunktion: ii) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U}$: $\det Dg(x) \neq 0$

Lokale Diffeo's sind die lokalen Koordinatentrafos!

<u>Beispiel</u>: Ebene Polarkoordinaten $g: (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Lokaler $\mathcal{C}^1$-Diffeo: $\det Dg(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r \neq 0$




Zum Bild des kleinen Quaders $Q_{u_0} = u_0 + Q$ (zentriert bei $u_0$) unter $\mathcal{C}^1$-Diffeo $g$:

Taylorentwicklung von $g$ um $u_0$ : $u \in Q_{u_0}$

$$g(u) = g(u_0) + Dg(u_0)(u-u_0) + o(|u-u_0|)$$

Somit: $g(Q_{u_0}) \approx g(u_0) + Dg(u_0)(Q)$

$$\boxed{\mathrm{vol}(g(Q_{u_0})) \approx |\det Dg(u_0)| \det Q}$$

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ J-meßbar liefert eine approximative Zerlegung von $A$ durch Würfel $\{Q_{u_j}\}$

$$\int_{g(A)} f(x)\,dx \approx \sum_j \mathrm{vol}(g(Q_{u_j}))\, f(g(u_j))$$

$$\approx \sum_j \mathrm{vol}(Q_{u_j})\, |\det Dg(u_j)|\, f(g(u_j))$$

$$\approx \int_A f(g(u))\, |\det Dg(u)|\, du$$

Dies motiviert die Transformationsformel:

**Satz** (Transformationsformel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $A \subset U$, $g(A) \subset \mathbb{R}^n$ beide kompakt und J-meßbar. Gibt es eine J-Nullmenge $N \subset A$ mit

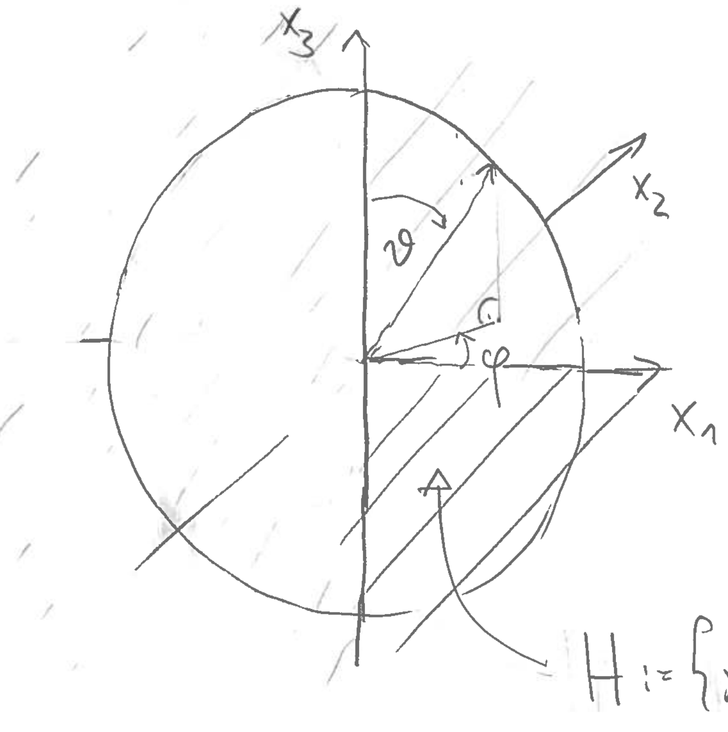
i) $g : A \setminus N \to \mathbb{R}^n$ ist injektiv

ii) $\forall x \in A \setminus N : \quad \det Dg(x) \neq 0$,

dann gilt für alle $f : A \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\boxed{\int_{g(A)} f(x)\, dx = \int_A f(g(u))\, |\det Dg(u)|\, du}$$

**Beispiel:** Kugelkoordinaten $g(r, \vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\vartheta \\ r \sin\varphi \sin\vartheta \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$




- $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$
- $\det Dg(r, \vartheta, \varphi) = \ldots = r^2 \sin\vartheta$
- $g : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ injektiv

$H := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 = 0 \}$

- $A := [0,R] \times [0,\pi] \times [0, 2\pi]$ kompakt, J-meßbar
  $g(A) = B_R(0) := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R \}$ — " —
- $N := A \cap H$ ist J-Nullmenge für alle $R > 0$.
- Aus Trafoformel für $f : B_R(0) \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_{B_R(0)} f(x)\, dx \underset{\text{Trafoformel}}{=} \int_A f(g(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta \; d(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\underset{\text{Fubini f. Quader}}{=} \boxed{\int_0^R \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} f(g(r,\vartheta,\varphi))\, d\varphi \right) \sin\vartheta \, d\vartheta \right) r^2 \, dr} \quad (*)$$

<u>Anwendungsbeispiel:</u> Elektrisches Potenzial von rot. symmetrischer Ladungsdichte, $\varrho : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, mit $\varrho(r) = 0$ für $r \geq R > 0$

Sei $a \in \mathbb{R}^3$ mit $|a| > R$. $[$o.B.d.A. $a = |a| e_3]$

$$\Phi(a) := \int_{B_R(0)} \frac{\varrho(|x|)}{|x-a|}\, dx \overset{(*)}{=} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varrho(r)}{|g(r,\vartheta,\varphi) - a|}\, d\varphi \, \sin\vartheta \, d\vartheta \; r^2 dr$$

$$= (**)$$

Nebenrechnung: ohne Einschränkung $a = |a| e_3$

$$|g(r,\vartheta,\varphi) - a|^2 = (r\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (r\sin\vartheta\sin\varphi)^2 + (r\cos\vartheta - |a|)^2$$
$$= r^2 + |a|^2 - 2r|a|\cos\vartheta$$

$$(**) \underset{\uparrow}{=} 2\pi \int_0^R dr\, r^2 \varrho(r) \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{1}{\sqrt{r^2+|a|^2-2r|a|\cos\vartheta}}$$

$d\varphi$-Integration

Subst: $y := \cos\vartheta$

$dy = -d\vartheta \sin\vartheta$

$$= 2\pi \int_0^R dr\, r^2 \varrho(r) \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{r^2+|a|^2-2r|a|y}}}$$

$$= \left[-\frac{1}{r|a|}\sqrt{r^2+|a|^2-2r|a|y}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{r|a|}\left(\sqrt{(r+|a|)^2} - \sqrt{(r-|a|)^2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ r<|a|}}{=} \frac{2}{|a|}$$

$$= \frac{4\pi}{|a|}\int_0^R \varrho(r)\, r^2\, dr$$

Bem: $4\pi \int_0^R \varrho(r) r^2 dr = \int_{B_R(0)} \varrho(|x|)\, dx$ Ges. Ladung!

## 22.4. Absolute Integrierbarkeit

**Def:** Eine Folge $(A_k)$ von beschränkten, J-meßbaren Mengen heißt ausschöpfend für $A \subset \mathbb{R}^n$, falls

i) $\forall k: \quad A_k \subset A_{k+1} \subset A$

ii) $\forall R>0: \quad \lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{vol}\left[(A \cap B_R(0)) \setminus A_k\right] = 0$

**Beispiele:** 1. $A = \mathbb{R}^n$ wird durch $A_k = B_k(0)$ oder $A_k = [-k,k]^n$ ausgeschöpft.

2. $A = B_1(0) \setminus \{0\}$ wird durch $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} \leq |x| \leq 1\}$ ausgeschöpft.

**Def:** Sei $f: A \to \mathbb{R}$.

1. Ist $f \geq 0$ und gibt es eine ausschöpfende Folge $(A_k)$ für $A$, so daß $f|_{A_k}$ Riemann integrierbar über $A_k$, dann heißt

$$(*) \quad \int_A f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Riemann Integral von $f$ über $A$.

2. Ist $|f|: A \to [0,\infty)$ über $A$ Riemann integrierbar mit $\int_A |f(x)|\,dx < \infty$, dann heißt $f$ absolut integrierbar über $A$.

[Sprechweise: $\int_A f(x)\,dx$ konvergent]

Für $f: A \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar gilt

$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$ Positivteil von $f$

· $f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$ Negativteil –

ist Riemann int.bar mit $\int_A f_\pm(x)\,dx < \infty$

Def: Für $f: A \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar über $A$ heißt:

$$\boxed{\int_A f(x)\,dx := \int_A f_+(x)\,dx - \int_A f_-(x)\,dx}$$

Riemann Integral von $f$ über $A$.

Bem: 1. Grenzwert (*) existiert in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stets wegen Monotonie: $\int_{A_k} f(x)\,dx \leq \int_{A_{k+1}} f(x)\,dx$.

2. Man kann zeigen:

i) Grenzwert (*) ist unabhängig von ausschöpfenden Folge

ii) Ist $A$ beschränkt und J-meßbar und $f: A \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, dann ist $f$ absolut integrierbar mit demselben Integralwert.

<u>Beispiele:</u> 1. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx$ konvergent, da $\forall R>0$

$$\int_{B_R(0)} e^{-|x|^2} dx \underset{\text{Trafosatz}}{=} \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} e^{-r^2} d\varphi \right) r\,dr = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr$$

$$\underset{\substack{\text{Subst.}\\ s=r^2}}{=} \pi \int_0^{R^2} e^{-s} ds = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right) \xrightarrow{R\to\infty} \pi.$$

Somit $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = \pi$

2. $\int_{B_1(0)\setminus\{0\}} \frac{dx}{|x|^\alpha}$ konvergiert für $\alpha < n := 3$, da $\forall \varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon \le |x| \le 1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^\alpha} r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 4\pi \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha-2}}$$

$$= \frac{4\pi}{3-\alpha}\left(1-\varepsilon^{3-\alpha}\right) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \frac{4\pi}{3-\alpha}$$

Somit: $\displaystyle\int_{B_1(0)} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \frac{4\pi}{3-\alpha}$ für $\alpha < 3 = n$.

**Satz** (Fubini für absolut int.bare Funktionen)

Seien $I_1, \dots, I_n \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig mit $I := I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$.

1. $f$ ist absolut integrierbar über $I$ genau dann wenn das iterierte Integral

$$\int_{I_1}\left(\int_{I_2} \cdots \left(\int_{I_n} |f(x_1, \dots, x_n)|\, dx_n\right) \dots dx_2\right) dx_1 < \infty$$

existiert.

2. Ist $f$ absolut integrierbar über $I$, dann:

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{I_1}\left(\int_{I_2} \cdots \left(\int_{I_n} f(x_1 \dots x_n)\, dx_n\right) \dots dx_2\right) dx_1$$

und die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

Anwendung: Gaußintegral $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$ (*)

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ ist stetig und über $\mathbb{R}$ abs. intbar.
- $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(x)f(y)$ –"– $\mathbb{R}^2$ –"–

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\right)dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y) \underset{\text{Beispiel 1}}{=} \pi \qquad \square$$

---

Bem: 1. Gaußsche Fehlerfunktion $\operatorname{erf}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

2. Verallgemeinerung: $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R})$, $A = A^T > 0$

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} x \cdot Ax}\,dx = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}\,.}$$ (Übung!)

<u>Satz</u> (Transformationsformel für abs. int.bare Fkt)

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $g: \overline{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}^n$ stetig mit

- $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ injektiv auf $\mathcal{U}$
- $\forall u \in \mathcal{U}: \ \det Dg(u) \neq 0$.

Ist $f: g(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ stetig und über $g(\mathcal{U})$ abs. integrierbar, dann ist $\mathcal{U} \ni u \mapsto f(g(u))\,|\det Dg(u)|$ über $\mathcal{U}$ abs. integrierbar und es gilt:

$$\int_{g(\mathcal{U})} f(x)\,dx = \int_{\mathcal{U}} f(g(u))\,|\det Dg(u)|\,du$$

(<u>Beweis</u>: siehe Wüst)

<u>Bem:</u> Verallgemeinerungen für $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ möglich (Später: Lebesgue Integration)