22. Mehrdimensionale Integration

Lernziele: 1. Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

2. Berechnen von Integralen mittels Satz von Fubini & Transformationsformel

Ergänzende Literatur:

- Kap. 13 in: C. Blatter, Analysis 2, Springer 1992.
- Kap. 19 in: R. Wüst, Mathematik für Physiker und Mathematiker (Band 2), Wiley 2009

22.1. Riemann Integral für Quader im $\mathbb{R}^n$

Mengen $Q \subset \mathbb{R}^n$ der Form $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] =: \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ heißen für $a_j < b_j$ Quader.

Volumen des Quaders: $\boxed{\mathrm{Vol}(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)}$

Zur Konstruktion von Integralen über $f: Q \to \mathbb{R}$:

1. $Z := \{Q_1, \ldots, Q_N\}$ heißt Zerlegung von Q in Quader $Q_1, \ldots, Q_N$, falls:

i) $Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j$

ii) Innere der Quader $Q_1, \dots, Q_N$ disjunkt:

$$Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = \emptyset \quad \text{für } j \neq k.$$

2. Ober/Untersumme der Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_N\}$

$$\overline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^{N} \operatorname{vol}(Q_j) \sup\{f(x) \mid x \in Q_j\}$$

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{j=1}^{N} \operatorname{vol}(Q_j) \inf\{f(x) \mid x \in Q_j\}$$

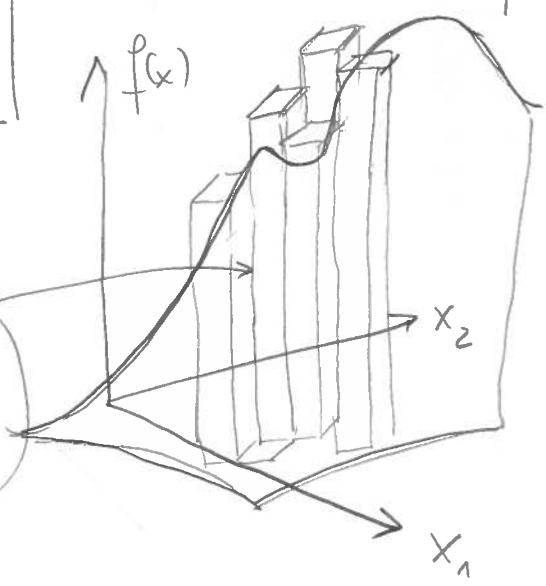
Def: Eine Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, heißt Riemann integrierbar, falls: $\inf_Z \left(\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) \right) = 0$

Das Riemann Integral über Q ist dann definiert durch

$$\boxed{\int_Q f(x)\,dx := \inf_Z \overline{S}_Z(f)}$$

Obersumme:

Grundfläche × Höhe



Bemerkungen:

1. Jede R-int.bare Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und es gilt: $\int_Q f(x)\,dx = \sup_Z \underline{S}_Z(f)$.

2. Äquivalente Formulierung:
   - Schwankungssumme: $D_Z(f) := \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Vol}(Q_j)\, \mathrm{osc}_{Q_j}(f)$
   - Oszillation auf $M \subset \mathbb{R}^n$: $\mathrm{osc}_M(f) := \sup_{x,y \in M} \big(f(x) - f(y)\big)$

   Da $\overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = D_Z(f)$, ist $f: Q \to \mathbb{R}$ R-int.bar genau dann wenn: $\inf_Z D_Z(f) = 0$

3. Elementare Eigenschaften: $f, g: Q \to \mathbb{R}$ R-int.bar

   i) Linearität: $\alpha \int_Q f(x)dx + \beta \int_Q g(x)\,dx = \int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx$
   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   ii) Positivität: $f \geq 0 \Rightarrow \int_Q f(x)\,dx \geq 0$

   iii) Dreiecksungleichung: $|f|$ R-int.bar mit $\left|\int_Q f(x)dx\right| \leq \int_Q |f(x)|dx$

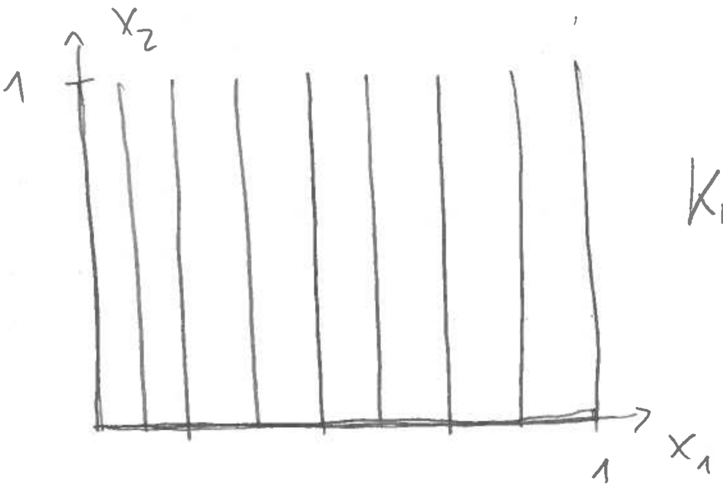
   iv) Volumenintegral: $\mathrm{Vol}(Q) = \int_Q dx$.

Für Spezialfall $n=1$ stimmt obiger Integralbegriff mit dem Riemann Integral aus Ana 1 überein.
Wie dort bereits illustriert („Dirichletsche Sprungfkt“) ist nicht jede beschränkte Fkt R-int.bar.

<u>Beispiel für $Q=[0,1]^2$:</u>

- $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ mit $K_n := \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}} \left\{ \frac{k}{2^{n-1}} \right\} \text{ oder } x_2 = 0 \right\}$
- Indikatorfkt: $1_K(x) := \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$

Da für jeden Teilquader $Q_j \subset Q$: $\operatorname{osc}_{Q_j}(1_K) = 1$
gilt $D_Z(1_K) = 1$ und somit 1_K nicht R-int.bar.



K_4 („Kamm“)

Satz: Jede stetige Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann int.bar.

Zum Beweis verwenden wir:

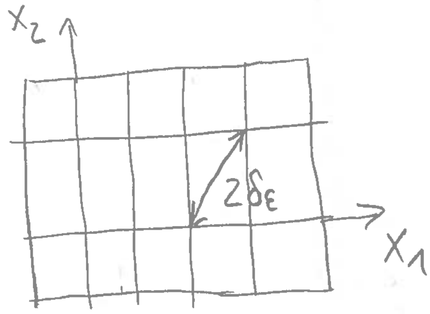
Lemma: $f \in \mathcal{C}(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x,y \in K : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Beweis des Satzes: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $\delta_\varepsilon > 0$ gemäß Lemma für $K = Q$ und eine Zerlegung $Z = \{Q_1, \dots, Q_{N_\varepsilon}\}$ von Q mit Eigenschaft

$$\forall j \ \forall x,y \in Q_j : |x-y| < \delta_\varepsilon$$



Damit: $$\operatorname{osc}_{Q_j}(f) = \sup_{x,y \in Q_j} \big(f(x) - f(y)\big) \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad D_Z(f) = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{vol}(Q_j) \operatorname{osc}_{Q_j}(f) \le \varepsilon \operatorname{Vol}(Q)$$

$\square$

Erste Methode zur Berechnung von Integralen:

Satz (Fubini für Quader)

Sind $Q_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ Quader und $Q := Q_1 \times Q_2$, $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und für alle $x_2 \in Q_2$ existiere das Riemann Integral $g(x_2) := \int_{Q_1} f(x_1, x_2)\, dx_1$.

Dann ist $g: Q_2 \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar und es gilt:

$$\int_Q f(x)\, dx = \int_{Q_2} g(x_2)\, dx_2 = \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2$$

Fazit: Wenn alle Integrale existieren, darf man die Integrationsreihenfolge vertauschen!

Beispiel: $Q = [1,2]^2$

$$\int_Q \frac{1}{(x+y)^2}\, d(x,y) = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2) \Big]_1^2 = \ln \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \ln \frac{9}{8}$$

22.2. Volumen & Riemann Integral für allgemeinere Mengen

Fortsetzung des Volumens von $A \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_Q 1_A(x)\, dx \qquad (Q \supset A)$$

nur für "genügend freundliche" A möglich (vgl. S. 4!)

Def. Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

1. J-Nullmenge, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge von Quadern $Q_1, \dots Q_{N_\varepsilon}$ gibt mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \mathrm{Vol}(Q_j) < \varepsilon$$

2. J-meßbar, falls ∂A eine J-Nullmenge ist.

("J" steht für Jordan)

Beispiele für J-Nullmengen:

1. Beschränkte Teilmengen von Hyperebenen:

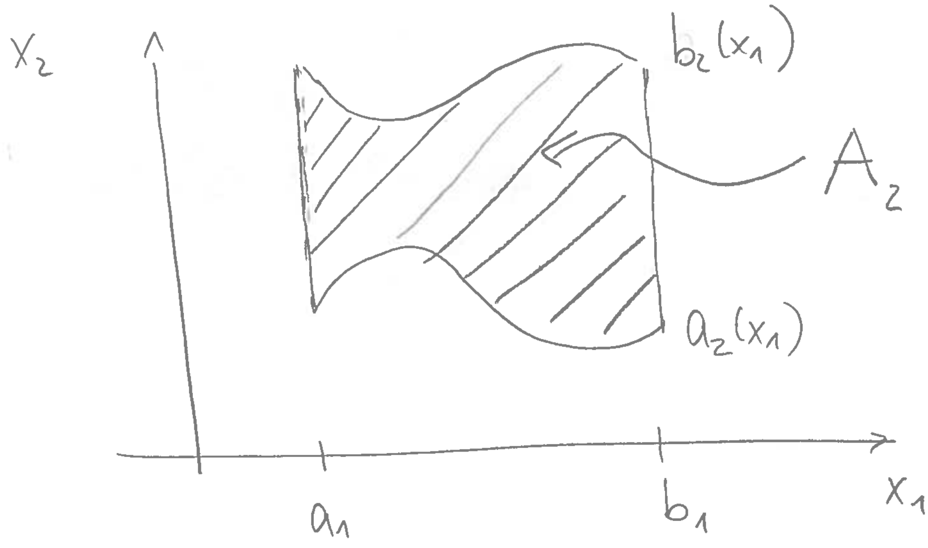
$A \subset \mathbb{R}^k$ beschränkt, $a \in \mathbb{R}^m \Rightarrow A \times \{a\} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ J-Nullmenge

2. Bilder $g(A)$ von J-Nullmengen $A \subset \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ unter $g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ sind J-Nullmengen.

Def. Sei $A_1 := [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ Quader und für $k = 2, \dots, n$

$$A_k := \{ (x,y) \subset A_{k-1} \times \mathbb{R} \mid a_k(x) \leq y \leq b_k(x) \}$$

wobei $a_k, b_k \in \mathcal{C}(A_{k-1}, \mathbb{R})$. Dann heißt $A := A_n$ ein Normalbereich im $\mathbb{R}^n$.



Satz: Jeder Normalenbereich $A \subset \mathbb{R}^n$ ist J-meßbar.

Beweis: Übung.

<u>Def</u>: (Fortsetzung des Riemann Integrals)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, J-meßbar. Dann heißt $f: A \to \mathbb{R}$ Riemann integrierbar, falls für jeden Quader $Q \supset A$

$$\tilde{f}: Q \to \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in Q \setminus A \end{cases}$$

Riemann integrierbar ist. Dann heißt

$$\int_A f(x)\,dx := \int_Q \tilde{f}(x)\,dx$$

das Riemann Integral über A.

Das Integral $\int_A f(x)\,dx$ erbt die Eigenschaften S. 3

Zusätzlich gilt für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, J-meßbar mit $A \cap B = \emptyset$ und $f: A, B \to \mathbb{R}$ R-int.bar

i) $A \cup B$ ist J-meßbar

ii) $\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$

(Additivität im Integrationsbereich)

Wir sagen, daß eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ J-fastüberall gilt, wenn die Menge $\{x \mid \mathcal{E} \text{ gilt nicht in } x\}$ eine J-Nullmenge ist. Schreibweise: $\mathcal{E}$ J-f.ü. oder $\mathcal{E}$ für f.a. x

Satz: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, J-meßbar und $f: A \to \mathbb{R}$ beschränkt

1. Ist $f(x) = 0$ für J-f.a. $x \in A$, dann ist f Riemann intbar mit $\int_A f(x)\,dx = 0$.
2. Ist f J-f.ü. stetig, dann ist f Riemann intbar.

Beweisidee: 1. Übung.

2. Für $Q \supset A$ Quader und $\tilde{f}: Q \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ 0 & x \in Q \setminus A \end{cases}$

sind die Mengen:

$$S := \{x \in A \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$$

$$N := \{x \in Q \mid \tilde{f} \text{ --''-- } \} \subset \partial A \cup S$$

J-Nullmengen. Für $\varepsilon > 0$ gibt es somit endl. viele Quader $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{n_\varepsilon} \subset Q$ mit $N \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} \tilde{Q}_j$

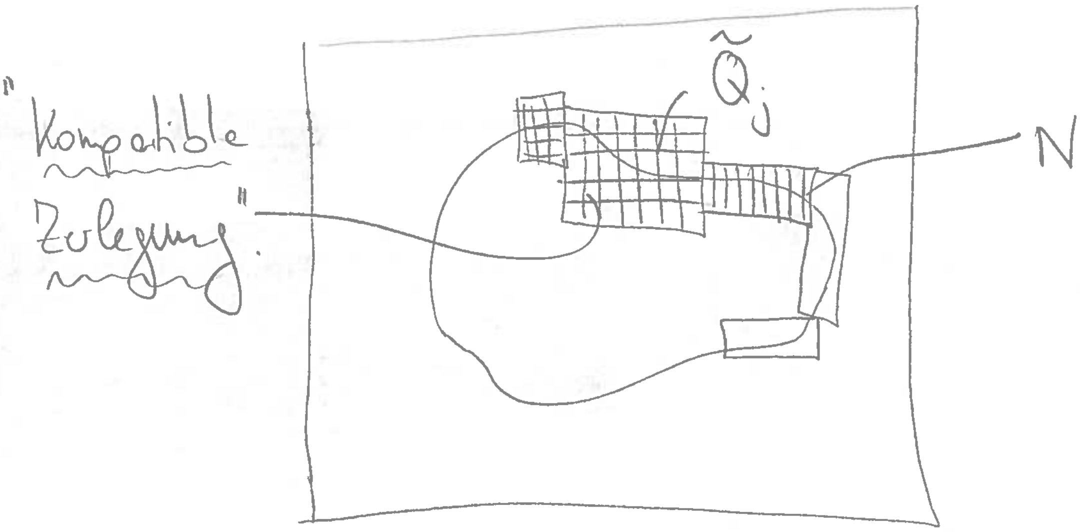
$\sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \mathrm{Vol}(\tilde{Q}_j) < \varepsilon$. Wir dürfen o.B.d.A annehmen:

$$N \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} \tilde{Q}_j^\circ =: \mathcal{U}$$

Da $Q\setminus\mathcal{U} =: K$ kompakt ist, ist die Restriktion $\tilde{f}|_K$ nach Lemma 5.5 gleichmäßig stetig.

Konstruiere Zerlegung $Z = (Q_1,\dots,Q_{m_\varepsilon})$ von Q, welche mit $\bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} \tilde{Q}_j$ kompatibel und:

$$\forall j=1\dots m_\varepsilon \ \forall x,y\in Q_j : \quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad (*)$$



Es gilt: $D_Z(\tilde{f}) = D_Z(\tilde{f}|_{\bar{\mathcal{U}}}) + D_Z(\tilde{f}|_K)$

1. $D_Z(\tilde{f}|_{\bar{\mathcal{U}}}) \le \sum_{j:Q_j\subset\bar{\mathcal{U}}} vol(Q_j)\, \underbrace{osc_{Q_j}(f)}_{\le 2\|f\|_\infty = 2\sup_{x\in Q}|f(x)|} \le 2\varepsilon\|f\|_\infty$

2. $D_Z(\tilde{f}|_K) \underset{(*)}{\le} \varepsilon\, Vol(Q)$. $\square$

Somit ist insbesondere 1_A für A J-meßbar Riemann-int.b.

Def: Für beschränkte, J-meßbare $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

$$\mathrm{Vol}(A) := \int_A dx$$

Volumen von A.

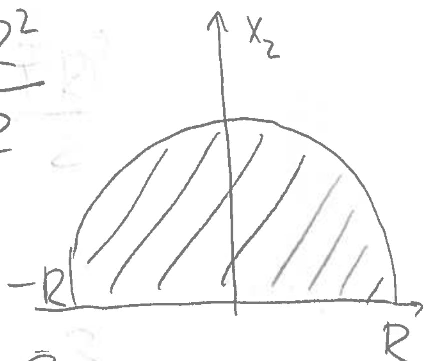
Berechnung von Riemann Integralen für Normalbereiche:

Satz (Fubini für Normalbereiche)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Normalbereich und $f: A \to \mathbb{R}$ Riemann int.bar.
Existieren alle iterierten Integrale, dann gilt:

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \left(\int_{a_n(x_1 \dots x_{n-1})}^{b_n(x_1 \dots x_{n-1})} f(x_1, \dots x_n)\,dx_n\right) \cdots\right) dx_1$$

Beispiel: $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_2 \le \sqrt{R^2 - x_1^2} \text{ und } |x_1| \le R\}$



- Gesamtmasse $\mathrm{Vol}(A) = \int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2\right) dx_1 = \frac{\pi R^2}{2}$

- Schwerpunkt x_2-Koordinate:

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(A)} \int_A x_2\,dx = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} x_2\,dx_2\right) dx_1 = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} (R^2 - x_1^2)\,dx_1$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\left[R^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{\pi R^2} \frac{2}{3} R^3 = \frac{4R}{3\pi}.$$