. . . .
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

15. Februar 2016, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **56 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Mehrdimensionales Integral** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie $\int\limits_{0<y<x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}(x,y)$.

LÖSUNG:

Der Integrationsbereich ist unbeschränkt, der Integrand ist nichtnegativ. Als ausschöpfende Folge können die Normalbereiche $A_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < y < x < n\}$, $n \in \mathbb{N}$, genommen werden. Somit ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{0<y<x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_0^x \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \Big(\big[-x\mathrm{e}^{-x} \big]_0^n + \int_0^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(-n\mathrm{e}^{-n} + 1 - \mathrm{e}^{-n} \big) = 1.\end{aligned}$$

ALTERNATIVE: Da der Integrand positiv ist kann alternativ auch direkt Fubini angewendet werden:

$$\int\limits_{0<y<x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}(x,y) = \int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \big[-x\mathrm{e}^{-x} \big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 1.$$

2. **Volumenberechnung** **[7 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 \le \mathrm{e}^{y^2+z^2} \,,\, y^2+z^2 \le 1 \Big\} \,.$$

LÖSUNG:

A ist ein Normalbereich, $A = \{y \in [-1,1], z \in [-\sqrt{1-z^2}, \sqrt{1-z^2}], x \in [-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(y^2+z^2)}, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(y^2+z^2)}]\} \subset \mathbb{R}^3$. **[1]**

Somit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(A) \quad &= \quad \int_A \mathrm{d}(x,y,z) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \int\limits_{y^2+z^2<1} \int\limits_{-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(y^2+z^2)}}^{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(y^2+z^2)}} \mathrm{d}z \mathrm{d}(y,z) \overset{[\mathbf{1}]}{=} \int\limits_{y^2+z^2<1} 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(y^2+z^2)} \mathrm{d}(y,z) \\ &\overset{\text{Polarkoord}[\mathbf{2}]}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r^2} r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r \overset{[\mathbf{1}]}{=} 2\pi \big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r^2} \big]_0^1 = 4\pi(\sqrt{\mathrm{e}} - 1).[\mathbf{1}]\end{aligned}$$

3. **Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche** **[12 Punkte]**

Sei $\Phi : V \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte der Mannigfaltigkeit $M = \Phi(V)$, wobei $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$ und $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2+v^2}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Wie lautet die Gramsche Determinante $g^\Phi(u,v)$ von Φ bei $(u,v) \in V$?

(b) Berechnen Sie die den Flächeninhalt von M.

(c) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = (1,0,0)$ durch die Oberfläche M. Die Orientierung der Fläche ist durch $n(0,0,0) = (0,0,-1)$ festgelegt. Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG:

(a) $g^\Phi(u,v) = \det(D\Phi(u,v)^{\mathrm{T}} D\Phi(u,v)) \overset{\text{hier}}{=} \|\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)\|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 1 + u^2 + v^2.$ **[2]**

(b) $\mathrm{Vol}_2(M) = \int\limits_M \mathrm{d}S \overset{[1]}{=} \int\limits_V \sqrt{g^\Phi(u,v)} \mathrm{d}(u,v) \overset{[1]}{=} \int\limits_{u^2+v^2<1} \sqrt{1+u^2+v^2}\, \mathrm{d}(u,v)$
$\overset{\text{Polarkoord.}[1]}{=} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2} r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r \overset{[1]}{=} 2\pi \left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$ **[1]**

(c) ALTERNATIVE 1. **Satz von Gauß:** Mit dem Deckel $D = \{(x, y, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1\}$ und der Menge $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, z \in (0, \Phi(x,y))\}$ gilt wegen $M \cup D = \partial A$ (mit $n(0,0,\frac{1}{2}) = (0,0,1)$) nach dem Satz von Gauß für den Fluss durch M

$$\int\limits_M \langle v(x), n(x) \rangle \mathrm{d}S(x) = \int\limits_A \underbrace{\operatorname{div} v(x,y,z)}_{=0} \mathrm{d}(x,y,z) - \int\limits_D \langle v(x), n(x) \rangle \mathrm{d}S(x)$$
$$= 0 - \int\limits_D \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} \mathrm{d}S(x) = 0$$

ALTERNATIVE 2. **Ausrechnen:** Wegen $\partial_u \Phi(0,0) \times \partial_v \Phi(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -n(0,0,0)$ gilt für den Fluss F von v durch M mit der angegebenen Orientierung

$$F = \int\limits_M \langle v(x), n(x) \rangle \mathrm{d}S(x) = -\int\limits_V \langle v(\Phi(u,v)), \partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v) \rangle \mathrm{d}(u,v)$$
$$= -\int\limits_V \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}(u,v) \overset{\text{Polarkoord.}}{=} -\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cos\phi \, \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = 0$$

4. **Kurvenintegral** **[4 Punkte]**

Berechnen Sie für $f(z) = \overline{z}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t^2 + \mathrm{i}t$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

LÖSUNG:

$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 (t^2 - \mathrm{i}t)(2t + \mathrm{i})\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t^3 - \mathrm{i}t^2 + t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{\mathrm{i}}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = 1 - \frac{\mathrm{i}}{3}.$

5. **Holomorphe Funktionen** **[7 Punkte]**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $g(x, y) := \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y)$ und $h(x, y) := \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + \mathrm{i}y \in U$.

Geben Sie jeweils an, ob die folgenden Eigenschaften für jedes solche f gelten:

(a) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☐ Ja ☒ Nein

(b) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede geschlossene C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☐ Ja ☒ Nein

(c) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede geschlossene in U nullhomotope C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☒ Ja ☐ Nein

(d) $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} h(x, y)$. ☒ Ja ☐ Nein

(e) $\frac{\partial}{\partial y} g(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x, y)$. ☐ Ja ☒ Nein

(f) Für jedes $z_0 \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass f sich als komplexe Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius ε darstellen lässt. ☒ Ja ☐ Nein

(g) f besitzt eine Stammfunktion auf U. ☐ Ja ☒ Nein

LÖSUNG:

(a) und (b) gelten im allgemeinen nicht ($z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$), (c) ist der Cauchy-Integralsatz.
(d) ist die erste der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, bei (e) fehlt das $-$ Vorzeichen.
(f) folgt aus dem Potenzreihenentwicklungssatz, $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ ist wieder ein Gegenbeispiel zu (g).

6. **Residuensatz** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-2)}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(b) Berechnen Sie alle Residuen von f.

(c) Bestimmen Sie $\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$. Begründen Sie das Ergebnis.

LÖSUNG:

(a) f hat einen Pol erster Ordnung bei $z = 2$ und einen Pol dritter Ordnung bei $z = 0$. **[2]**

(b) $\operatorname{Res}_2(f) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \frac{1}{z^3}|_{z=2} = \frac{1}{8}$. **[1]**

$\operatorname{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} z^3 f(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{-1}{(z-2)^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{-1(-2)}{(z-2)^3} = -\frac{1}{8}$. **[2]**

(c) f ist meromorphe Funktion. Der einzige Pol von f im Inneren der geschlossenen Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ ist bei $z = 0$. **[1]**

Somit gilt nach dem Residuensatz $\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_0(f) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$. **[2]**

7. **Differentialgleichung** **[9 Punkte]**

Sei $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

(a) Berechnen Sie $\widehat{\psi}(k,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x,t)\mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie die L^2-Norm von $f(x) := \psi(x,t)$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Für $a > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x = \sqrt{a}\mathrm{e}^{-\frac{ak^2}{2}}$.

Lösung:

(a) Wegen der Algebraisierung der Ableitung wird die partielle Differentialgleichung für $\widehat{\psi}$ zu **[2]**

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{\psi}(k,t) = k^2\widehat{\psi}(k,t)$$

Für $k \in \mathbb{R}$ hat diese gewöhnliche Differentialgleichung die Lösung **[3]**

$$\widehat{\psi}(k,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^2t}\widehat{\psi}(k,0) \overset{\text{Hinweis}}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^2t}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2} = \mathrm{e}^{-k^2(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)}$$

(b) $\|f\|_2^2 \overset{[1]}{=} \int |\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x \overset{\text{Plancherel } [1]}{=} \int |\widehat{\psi}(k,t)|^2\mathrm{d}k \overset{[1]}{=} \int \mathrm{e}^{-k^2}\mathrm{d}k \overset{[1]}{=} \sqrt{\pi}$, also $\|f\|_2 = \pi^{1/4}$.

8. **Distributionen** **[5 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Ableitung der als Distribution aufgefassten Funktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

gleich 2δ ist, wobei δ, wie üblich, die Delta-Distribution im Ursprung bezeichnet.

Lösung:

Für sgn als Distribution gilt $(\operatorname{sgn}, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ für jede Schwartzfunktion ϕ. Somit ist für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Ableitung **[1]**

$$(\operatorname{sgn}', \phi) \overset{[1]}{=} -(\operatorname{sgn}, \phi') = \int_{-\infty}^{0} \phi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x \overset{[1]}{=} \big[\phi(x)\big]_{-\infty}^{0} - \big[\phi(x)\big]_{0}^{\infty} \overset{\phi(\pm\infty)=0\ [1]}{=} \phi(0) + \phi(0)$$
$$= 2\phi(0) \overset{[1]}{=} (2\delta, \phi).$$

Also $\operatorname{sgn}' = 2\delta$.