....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

15. Februar 2016, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **56 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Mehrdimensionales Integral** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie $\int\limits_{0<y<x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}(x, y)$.

2. **Volumenberechnung** **[7 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 \leq \mathrm{e}^{y^2+z^2} \,,\, y^2 + z^2 \leq 1\Big\}\ .$$

3. **Fluss eines Vektorfeldes durch eine Fläche** **[12 Punkte]**

Sei $\Phi : V \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine Karte der Mannigfaltigkeit $M = \Phi(V)$, wobei $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$ und $\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{u^2+v^2}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Wie lautet die Gramsche Determinante $g^\Phi(u, v)$ von Φ bei $(u, v) \in V$?

(b) Berechnen Sie die den Flächeninhalt von M.

(c) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfelds $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) = (1, 0, 0)$ durch die Oberfläche M. Die Orientierung der Fläche ist durch $n(0, 0, 0) = (0, 0, -1)$ festgelegt. Begründen Sie Ihre Antwort.

4. **Kurvenintegral** **[4 Punkte]**

Berechnen Sie für $f(z) = \overline{z}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t^2 + \mathrm{i}t$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

5. **Holomorphe Funktionen** **[7 Punkte]**

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $g(x,y) := \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y)$ und $h(x,y) := \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $x + \mathrm{i}y \in U$.
Geben Sie jeweils an, ob die folgenden Eigenschaften für jedes solche f gelten:

(a) $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☐ Ja ☐ Nein

(b) $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede geschlossene C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☐ Ja ☐ Nein

(c) $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für jede geschlossene in U nullhomotope C^1-Kurve $\gamma : [0,1] \to U$. ☐ Ja ☐ Nein

(d) $\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} h(x,y)$. ☐ Ja ☐ Nein

(e) $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)$. ☐ Ja ☐ Nein

(f) Für jedes $z_0 \in U$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass f sich als komplexe Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius ε darstellen lässt. ☐ Ja ☐ Nein

(g) f besitzt eine Stammfunktion auf U. ☐ Ja ☐ Nein

6. **Residuensatz** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-2)}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle isolierten Singularitäten von f.

(b) Berechnen Sie alle Residuen von f.

(c) Bestimmen Sie $\int\limits_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$. Begründen Sie das Ergebnis.

7. **Differentialgleichung** **[9 Punkte]**

Sei $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

mit der Anfangsbedingung $\psi(x,0) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

(a) Berechnen Sie $\widehat{\psi}(k,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x,t)\mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie die L^2-Norm von $f(x) := \psi(x,t)$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Für $a > 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x = \sqrt{a}\mathrm{e}^{-\frac{ak^2}{2}}$.

8. **Distributionen** **[5 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Ableitung der als Distribution aufgefassten Funktion $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ -1, & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

gleich 2δ ist, wobei δ, wie üblich, die Delta-Distribution im Ursprung bezeichnet.