TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 14
(28.1.2016)

Zentralübung

Z14.1. Der Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{Z})$

(a) Wie ist der Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{Z})$ der komplexwertigen quadratsummierbaren Folgen auf $\mathbb{Z}$ definiert?

(b) Zeigen Sie, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, mit $e_k(n) = \delta_{k,n}$ für $n \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis des $\ell^2(\mathbb{Z})$ bildet.

Z14.2. Fourierreihen und Hilbertraum

Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([-\pi,\pi])$ und die Familie von Funktionen $e_k \in L^2([-\pi,\pi])$ mit $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([-\pi,\pi])$ ist.

(b) Begründen Sie, dass $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sogar eine Orthonormalbasis des $L^2([-\pi,\pi])$ ist.

Z14.3. Matrixelemente eines beschränkten Operators

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB des Hilbertraums $\mathcal{H}$.

(a) Sei $\tilde{\phi}_m := A\phi_m \in \mathcal{H}$ für $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$, dass

$$A\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_m \langle \phi_m, \psi\rangle.$$

(b) Seien $A_{nm} := \langle \phi_n, A\phi_m\rangle$ die Matrixelemente von A. Dann gilt für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}$, dass

$$A\psi = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \phi_n A_{nm} \langle \phi_m, \psi\rangle.$$

(c) Setzt man allgemein für $\psi \in \mathcal{H}$: $(\psi)_n := \langle \phi_n, \psi\rangle$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(A\psi)_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} (\psi)_m.$$

Tutoraufgaben

T14.1. Translationsoperator

Sei $T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $(T_a\psi)(x) = \psi(x-a)$ der Translationsoperator für eine Verschiebung um $a \in \mathbb{R}$ und $S_b : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $(S_b\psi)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\psi(x)$ die Verdrillung mit der Wellenzahl $b \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie, dass T_a und S_b unitäre Operatoren sind, d.h., $T_a^{-1} = T_a^\dagger$ und $S_a^{-1} = S_a^\dagger$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}T_a = S_{-a}\mathcal{F}$ und $T_a = \mathcal{F}S_a\mathcal{F}^{-1}$.

T14.2. Hilbertraum

Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Eigenschaften

(i) $\forall \phi \in \mathcal{H}: \ (\forall n \in \mathbb{N} : \langle b_n, \phi\rangle = 0) \Longrightarrow \phi = 0$,

(ii) $\forall \psi \in \mathcal{H}: \ \psi = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle b_k, \psi\rangle b_k$.

Hausaufgaben

H14.1. Volumenberechnung

Berechnen Sie das Volumen der Menge $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } y^2 + z^2 \leq 1\}$.
HINWEIS: Integrieren Sie die z-Variable als letztes aus.

H14.2. Zirkulation eines Vektorfeldes

Es bezeichne $K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r\}$ die Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$. Sei nun $M := K_7(0, 0) \setminus (K_2(0, -4) \cup K_1(0, 0) \cup K_1(-3, 3) \cup K_1(3, 3))$. Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfeldes

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 2y + x^2 \sin(x) \\ \tanh(y) + 3x \end{pmatrix}$$

entlang des positiv orientierten Randes von M.

H14.3. Residuen

Gegeben ist die Funktion $f(z) = \frac{z}{\sin z \cos z}$.

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und klassifizieren Sie diese.

(b) Bestimmen Sie die Werte aller Residuen von f.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_{|z-\pi|=4} f(z) \mathrm{d}z$.

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe von f im Entwicklungspunkt 0?

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 5.6.2016, bis 12:00 im Briefkasten, Keller FMI Gebäude
Die Hausaufgaben werden nicht korrigiert, können aber gegebenenfalls als "sinnvoll bearbeitet" gewertet werden.