TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 13
(21.1.2016)

Zentralübung

Z13.1. Ableitung von Distributionen

Die Heaviside-Funktion $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass im Distributionensinn die Delta-Distribution die Ableitung der Heaviside-Funktion ist, $\Theta' = \delta$. Geben Sie für Θ eine Folge von approximierenden Schwartz-Funktionen an.

(b) Berechnen sie die erste und zweite Ableitung von $x \mapsto |x|$ im Distributionensinn. Geben Sie für die Betragsfunktion eine Folge von approximierenden Schwartz-Funktionen an.

Z13.2. Eigenschaften der Norm in einem Prähilbertraum

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \mathcal{H}$:

(a) $|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \, \|\psi\|$, (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(b) $\|\psi\| \geq 0$, und $\|\psi\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \psi = 0$,

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $\|\lambda\psi\| = |\lambda| \, \|\psi\|$,

(d) $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$, (Dreiecksungleichung)

(e) $\|\phi + \psi\|^2 + \|\phi - \psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$. (Parallelogrammgleichung)

Z13.3. Konstruktion eines Skalarprodukts aus geeigneter Norm

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung $\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$ immer gilt. Zeigen Sie, dass dann die Polarzerlegung $\langle \phi, \psi \rangle := \frac{1}{4}(\|\phi + \psi\|^2 - \| - \phi + \psi\|^2)$ ein Skalarprodukt auf V definiert.
Hinweis: Zeigen Sie für die Linearität zunächst, dass $\langle \phi, \psi \rangle + \langle \phi, \chi \rangle = 2\langle \phi, \frac{1}{2}(\psi + \chi) \rangle$.

Tutoraufgaben

T13.1. Fouriertransformation von Distributionen

Bestimmen Sie die Fouriertransformierten folgender als Distributionen interpretierten Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x \cdot Ax}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit,

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 \cdot x}$, $k_0 \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

T13.2. Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit

Zeigen Sie: Ist $E \subset V$ eine orthogonale Menge im Prähilbertraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist E eine Menge von linear unabhängigen Vektoren.

T13.3. Hilbertraum

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Hilbertraum H, d.h. $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine orthogonale Folge (x_n) an mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$.

(d) Gilt (a) auch in einem Prähilbertraum?

(e) Gilt (b) auch in einem Prähilbertraum?

Hausaufgaben

H13.1. Fouriertransformation und Plancherel-Identität

Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{(x+\mathrm{i})^2}$ und das Integral $\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$.

H13.2. Parallelogrammgleichung und Polarisationsidentität

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ die Polarisationsidentität :

$$\langle \phi, \psi\rangle = \frac{1}{4}\big(\|\phi+\psi\|^2 - \|-\phi+\psi\|^2 + \mathrm{i}\|\mathrm{i}\phi+\psi\|^2 - \mathrm{i}\|-\mathrm{i}\phi+\psi\|^2\big).$$

H13.3. Orthogonales Komplement

Sei H ein Hilbertraum. Man zeige für beliebige Teilmengen $A \subset H$

(a) $\overline{\mathrm{Lin}(A)} = H \iff A^\perp = \{0\}$.

(b) $(A^\perp)^\perp = A \iff A$ ist abgeschlossener Unterraum von H.

(c) $((A^\perp)^\perp)^\perp = A^\perp$.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 1.2.2016, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude