TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 12
(14.1.2016)

Zentralübung

Z12.1. Shannon-Nyquist Abtasttheorem

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, so dass $\hat{f}(k) = 0$ für $k \notin [-2\pi F, 2\pi F]$, $F > 0$. Dann ist f vollständig durch seine Werte bei nT, $n \in \mathbb{Z}$, bestimmt, falls $0 < T < \frac{1}{2F}$, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\operatorname{sinc}\big(\pi(n - \tfrac{x}{T})\big), \qquad \text{wobei } \operatorname{sinc}(x) = \tfrac{\sin x}{x}.$$

Z12.2. Eindimensionale Wellengleichung

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $c > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x)$.

Tutoraufgaben

T12.1. Integrierbarkeit und quadratische Integrierbarkeit

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$.

(b) Begründen Sie, dass $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ keine L^1-Funktion, aber eine L^2-Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Was kann man über die Fouriertransformierte von g sagen?

T12.2. Diffusionsgleichung mit Drift

Lösen Sie die Diffusionsgleichung mit Drift,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\Delta\rho(x,t) + v \cdot \nabla\rho(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

mit $D > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, für die Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, wobei $\rho_0, \widehat{\rho_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Bestimmen Sie $G_t(x) = G(x,t)$, so dass $\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(G_t * \rho_0)(x)$ mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x, wie in der Vorlesung.

Hausaufgaben

H12.1. Fouriertransformation von Gauß-Kurven (Klausuraufgabe)

(a) Wie wurde in der Vorlesung die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Gauß-Kurve $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$?

(c) Beweisen Sie, dass die Faltung $f_1 * f_2$ zweier Gauß-Kurven, $f_j(x) = \exp(-\frac{x^2}{2t_j})$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, wieder eine Gauß-Kurve ist.

(d) Sei nun $h := f_1 * f_2$.

(i) Welche Aussagen gelten für h?

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ h ist stetig, ☐ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$?

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

H12.2. Einfache Fouriertransformation (Klausuraufgabe)

Sei $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$.

(b) Ist die Fouriertransformierte $\widehat{f}(k)$ quadratintegrabel?

☐ Ja ☐ Nein

H12.3. Inhomogene lineare Differentialgleichung und Fouriertransformation

Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = \frac{1}{4}x(t) + f(t)$ mit $f(t) = e^{-|t|}$.

(a) Wie lauten die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung $x_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation.

(c) Geben Sie eine spezielle Lösung $x_1(t)$ an, deren Asymptotik für $t \to -\infty$ mit $f(t)$ übereinstimmt (d.h. $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{x_1(t)}{f(t)}$ existiert).

Hausaufgabenabgabe: Montag, 25.1.2016, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude