Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 11
(7.1.2016)

Zentralübung

Z11.1. Eigenschaften der Fouriertransformation

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie:

(a) **(Linearität)** Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.

(b) **(Verdrillung)** Sei $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}h \cdot x} f(x)$. Dann ist
$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k-h).$$

(c) **(Skalierung)** Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Dann gilt für $g(x) := f(\frac{x}{\lambda})$
$$\widehat{g}(k) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda k)\,.$$

Z11.2. Hermite-Polynome

(a) Berechnen und skizzieren Sie $f^{(n)}(x)$ und ihre Fouriertransformierten für $n = 0, 1, 2$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Bestimmen Sie linear unabhängige $h_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, jeweils als Linearkombination von $f^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, so dass $\widehat{h_n}(k) = \lambda_n h_n(k)$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, und skizzieren Sie diese.

Z11.3. Eigenschaften der Faltung

Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

(a) **(Kommutativität)** $f * g = g * f$,

(b) **(Assoziativität)** $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) **(Distributivität)** $f * (g + h) = f * g + f * h$,

(d) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Tutoraufgaben

T11.1. Fouriertransformation bei linearer Abbildung

Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen. Zeigen Sie: Sei A eine invertierbare $n \times n$–Matrix. Dann gilt für $f_A(x) := f(Ax)$
$$\widehat{f_A}(k) = \frac{1}{|\det A|} \widehat{f}\left((A^T)^{-1} k\right).$$

T11.2. Glattheit und Abfall der Fouriertransformation

(a) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $j = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass
$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{|k|^m}\right) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

(b) Berechnen Sie direkt die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass $g(x) = x^m \mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, m–mal stetig differenzierbar ist, $m \in \mathbb{N}$, indem Sie Eigenschaften der Fouriertransformierten $\widehat{g}$ ausnutzen.

T11.3. Faltung

Berechnen und skizzieren Sie die Faltung von $\chi_{[-5,5]}$ mit den Funktionen in x,
(a) $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$, (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, (c) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ und (d) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Hausaufgaben

H11.1. Fouriertransformation mit Residuensatz

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, $a > 0$.
Zeigen Sie $f_a * f_b = f_{a+b}$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $h(x) = \frac{1}{x^4+4}$.

H11.2. Fouriertransformationen des Halbkreises

Berechnen Sie die Fouriertransformationen von $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie f, g und ihre Fouriertransformationen.
Welches Abfallverhalten besitzen $\widehat{f}$ und $\widehat{g}$ für große $|k|$? (Recherche, ohne Beweis).
Hinweis: Substitution $x = \sin t$, für g noch partielle Integration. Die Besselfunktionen sind gegeben durch $J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(x \sin t - nt)\mathrm{d}t = J_{-n}(-x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

H11.3. Eigenschaften der Fouriertransformation

Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Welche Eigenschaften haben dann sowohl f als auch $\widehat{f}$?

(b) Drücken Sie $\widehat{\widehat{f}}$, $\widehat{\widehat{\widehat{f}}}$ und $\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}$ durch f und $\widehat{f}$ aus.

(c) Zeigen Sie:
   (i) f ist reell und gerade $\Rightarrow$ $\widehat{f}$ ist reell und gerade,
   (ii) f ist reell und ungerade $\Rightarrow$ $\widehat{f}$ ist rein imaginär und ungerade.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 18.1.2016, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude