TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 10
(17.12.2015)

Zentralübung

Z10.1. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $F(y) := \mu(\{x \in [0,1] \mid f(x) > y\})$ für $y \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von $f : [0,1] \to [0, f(0)]$ ist.

(b) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(y)\mathrm{d}y$.

Z10.2. Vertauschen von Limes und Integral

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\mathrm{d}x$, stetig ist.

(b) Sei $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar nach der ersten Variable. Für alle $\lambda \in [a,b]$ seien $x \mapsto g(\lambda, x)$ und $x \mapsto \partial_1 g(\lambda, x)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ und für alle x sei $|\partial_1 g(\lambda, x)| \le h(x)$ mit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, x)\mathrm{d}x.$$

Tutoraufgaben

T10.1. Vertauschen von Summe und Integral

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenzsätze aus der Vorlesung:

(a) Seien $g_n : \Omega \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, messbar. Dann gilt $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

(b) Seien $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar und $\sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ fast überall absolut konvergent und $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

T10.2. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z) = \frac{e^{ikz}}{z}$, $k > 0$ und $\gamma_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r \to \infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \ge 0$ gilt, aber

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)dx \ne \int\limits_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx.$$

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Ist das ein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz?

Hausaufgaben

H10.1. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0, \infty]$, $\mu(\{n\}) = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. HINWEIS: Benutzen Sie, dass bei festem k die Folge $\binom{n}{k}\frac{|z|^k}{n^k}$ für $n \to \infty$ monoton gegen $\frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

H10.2. Ableitung der Gammafunktion

Für $x > 0$ ist die Gammafunktion definiert als $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Begründen sie, warum der Integrand auf $\mathbb{R}^+$ integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$: $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist. Wie lautet der Integralausdruck für die Ableitung?

Hausaufgabenabgabe: Montag, 11.1.2016, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude

Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch in das Jahr 2016!