TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 7
(26.11.2015)

Zentralübung

Z7.1. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

Z7.2. Hauptteil

Sei $U \subset C$ offen und $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol k-ter Ordnung bei a. Dann sind die Koeffizienten des Hauptteils von f, $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{c_{-j}}{(z-a)^j}$, explizit gegeben durch

$$c_{-j} = \tfrac{1}{(k-j)!}\left(\tfrac{d}{dz}\right)^{k-j}(z-a)^k f(z)\Big|_{z=a}$$

Z7.3. Partialbruchzerlegung

Seien p, q Polynome. Die eindeutig bestimmte Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\frac{p}{q}$ lautet

$$\frac{p(z)}{q(z)} = g(z) + \sum_{j=1}^{l} H_j(z)$$

wobei die z_j, $j = 1, \dots l$, die Nullstellen von q sind, $H_j(z)$ die zugehörigen Hauptteile von $\frac{p}{q}$ bei z_j, und g ein Polynom ist.

(a) Welchen Grad hat g?

(b) Wieviele Koeffizienten gibt es insgesamt zu bestimmen?

(c) Welchen Ansatz kann man für $\frac{z^5}{(z-1)^2(z-2)}$ machen? Wie bestimmt man g und die Hauptteile direkt? Wie erhält man in Maple/Mathematica die Partialbruchzerlegung?

Tutoraufgaben

T7.1. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Man zeige $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, d.h., das Bild von f liegt dicht in $\mathbb{C}$. Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.
HINWEIS: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

T7.2. Der Identitätssatz

Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Formulieren Sie den Identitätssatz mit eigenen Worten in einem Satz.

(b) Sei $f = \log$, $g(z) = \log(-z) + \mathrm{i}\pi$. Zeigen Sie $f \neq g$. Auf welcher Menge stimmen die beiden Funktionen überein?

(c) Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.

(d) Ist $g(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

T7.3. Nullstellen und Pole

(a) Seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, $k, l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für $k \geq l$ die analytische Fortsetzung von $\frac{f}{g}$ in z_0 eine $(k-l)$-fache Nullstelle (falls $k > l$), oder keine Nullstelle (falls $k = l$) besitzt und für $k < l$ einen Pol $(l-k)$-ter Ordnung.

(b) Charakterisieren Sie die Singularitäten von $z \mapsto \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.
Welchen Konvergenzradius hat die Taylorentwicklung $\frac{z}{\mathrm{e}^z-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$?
Bemerkung: Die B_n sind die sogenannten Bernoulli-Zahlen,
$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$.
Was können Sie zu der Vermutung, dass die B_n beschränkt sind, sagen?

Hausaufgaben

H7.1. Anwendungen des Identitätssatzes

Wieviele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (c) $f(\pi n) = 0$, (d) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$.

H7.2. Laurentreihenentwicklungen

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen einschließlich Konvergenzbereich auf punktierten Kreisscheiben um die isolierten Singularitäten von

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$, (c) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$, (d) $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.

H7.3. Die Besselfunktionen

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt die Funktion $f_z(w) = e^{\frac{z}{2}(w - \frac{1}{w})}$ auf $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Laurentreihenentwicklung

$$e^{\frac{z}{2}(w-\frac{1}{w})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) w^n$$

$J_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt die n-te Besselfunktion. Man zeige

(a) Für $n \geq 0$ ist $J_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$.

(b) $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(z \sin t - nt) \mathrm{d}t$.

Hinweis: Man benutze die Integraldarstellung der Laurentkoeffizienten; in (a) durch geeignetes Einsetzen von Exponentialreihen; in (b) durch Auswerten entlang der Einheitskreislinie.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 7.12.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude