TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 6
(19.11.2015)

Zentralübung

Z6.1. Potenzreihen sind analytisch

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$ und $z_0 \in B_R(0)$.

(a) Zeigen Sie, dass f bei $z = 0$ komplex differenzierbar ist.

(b) Geben Sie für eine Doppelfolge $c : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine hinreichende Bedingung an, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} c_{nk}$ gilt.

(c) Für $|z - z_0| < R - |z_0|$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |a_n| \, |z_0|^{n-k} |z - z_0|^k < \infty$.

(d) Bestimmen Sie eine Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, so dass $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ für $|z-z_0| < R-|z_0|$.

HINWEIS: Man setze in der Potenzreihe $z{=}(z{-}z_0){+}z_0$. Ergebnis: $b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} z_0^n$

Z6.2. Hauptzweig des komplexen Logarithmus

Bestimmen Sie auf der geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ die Stammfunktion $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ von $z \mapsto \frac{1}{z}$, die für $z > 0$ mit der reellen Logarithmusfunktion ln übereinstimmt. Bei Bedarf setzt man $\log(-r) = \lim_{\epsilon \to 0} \log(-r + \mathrm{i}\epsilon)$ für $r > 0$. Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\log(r e^{\mathrm{i}\phi})$ mit $r > 0$, $\phi \in \,]-\pi, \pi]$ und $\log(x + \mathrm{i}y)$ für $x > 0$ an. Was ist $\log(\mathrm{i})$, $\log(4 + 3\mathrm{i})$, $\log(-\mathrm{e})$? Unter welcher Bedingung gilt $\log(z) + \log(w) = \log(zw)$?

Z6.3. Ableitung entlang einer Kurve

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Kurve in $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Ableitungen, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0)$ für $t_0 \in [a, b]$ gilt.

(b) Es gilt $\int_\gamma f'(z)\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Tutoraufgaben

T6.1. Potenzreihen gebrochen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung und Konvergenzradius von

(a) $\frac{1}{z-a}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\frac{1}{1+z^2}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$,

T6.2. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

T6.3. Die allgemeine Potenz und ihre Reihenentwicklung

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die allgemeine Potenz definiert als $z^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \log z}$, wobei $\ln(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) := \mathrm{i}\phi + \ln r$ für $r > 0$, $\phi \in\,]-\pi, \pi]$, der auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (unstetig) fortgesetzte Hauptzweig des Logarithmus ist. Man zeige:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}$ für $z \in \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

(b) Für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ist z^α auf $\mathbb{R}^-$ nicht stetig. Hinweis: Betrachte $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+t)}$ bei $t = 0$.

(c) Für $|z| < 1$ gilt mit $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdots \frac{\alpha-k+1}{k}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $(1+z)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$.
Hinweis: Man berechne die Ableitungen von $f(z) = (1+z)^\alpha$ im Ursprung.

Hausaufgaben

H6.1. Komplexe Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie explizit $\int\limits_\gamma z^n dz$ für $\gamma(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$, $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1,\, \mathrm{Re}\, z > 0,\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Konstruieren Sie einen Weg γ entlang ∂G und berechnen Sie $\int_\gamma \bar{z}\, \mathrm{d}z$, $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1}$, $\int_\gamma z\bar{z}\, \mathrm{d}z$.

(c) Sei $p(z)$ ein komplexes Polynom, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Man zeige $\int\limits_{|z-a|=r} \overline{p(z)} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} r^2 \overline{p'(a)}$.

H6.2. Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Berechnen sie $\int\limits_\gamma z\mathrm{e}^{\pi z^2} \mathrm{d}z$, wobei γ die Kurve von 0 nach $1 + \mathrm{i}$ entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt i ist.

H6.3. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\mathrm{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w$$

und damit holomorph auf ganz $\mathbb{C}$.

(a) Drücken Sie die beiden unvollständigen Fresnel-Integrale $\mathrm{C}(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$ und $\mathrm{S}(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ jeweils durch $\mathrm{erf}(z)$ aus. Hinweis: Man wähle $z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) Zeigen Sie für die Kurve $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $r > 0$: $\left| \int\limits_\gamma \mathrm{e}^{-w^2} \mathrm{d}w \right| \leq \frac{\pi}{4r}$.
Hinweis: Man benutze $\cos(2t) \geq 1 - \frac{4t}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ unter Benutzung von (a) und (b) und der bekannten reellen Asymptotik $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{erf}(x) = \pm 1$. Hinweis: Betrachten sie das Kurvenintegral entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1, \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$ für $r \to \infty$.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 30.11.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude