Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 5
(12.11.2015)

Zentralübung

Z5.1. Rotation als Wirbelstärke

a) Sei $(M, \mathbf{n})$ eine zweidimensionale orientierte C^2-Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und $\Phi : V \to U$ eine Karte von M, wobei V eine offene Menge mit $V \supset B_1(0)$ ist. Sei $A_\varepsilon := \Phi(B_\varepsilon(0))$ für $\varepsilon \in (0,1)$, $\partial A_\varepsilon := \Phi(\varepsilon S^1)$ und $x_0 := \Phi((0,0))$. Sei $\mathbf{v} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\tilde{U} \supset \overline{\Phi(B_1(0))}$ offen.
Zeigen Sie:
$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{v}(x_0)\, , \mathbf{n}(x_0) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}_2(A_\varepsilon)} \int_{\partial A_\varepsilon} \langle \mathbf{v}, \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \rangle,$$
wobei die $\boldsymbol{\tau}$ die durch $\mathbf{n}$ auf ∂A_ε induzierte Orientierung ist.

b) Folgern Sie aus (a): Falls das Kurvenintegral $\int_\gamma \langle \mathbf{v}(x), \mathrm{d}x \rangle$ für eine beliebige C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, so folgt $\langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$ auf $M \cap \tilde{U}$.

c) Zeigen Sie: Für $M = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \{0\}$ und $\mathbf{v}(x) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1, 0)$ gilt $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ auf M, aber $\int_\gamma \langle \mathbf{v}(x), \mathrm{d}x \rangle$ hängt im Allgemeinen nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt von $\gamma : [a,b] \to M$ ab.

Z5.2. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z,\ z \in (1/2, 1)\}$ ein Teil eines Paraboloids und $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x,y,z) = (yz, -xz, 1)$. Berechnen Sie $\int_M \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}S$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei $\mathbf{n}$ das stetige Normalenfeld an M ist, das nach außen zeigt.

Z5.3. Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen und Cauchyscher Integralsatz

(a) Die komplexwertigen Funktionen f, g seien gegeben durch $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $g(x + \mathrm{i}y) = \tilde{u}(x,y) + \mathrm{i}\tilde{v}(x,y)$ mit $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, welche jeweils die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
$$\partial_x v = -\partial_y u, \quad \partial_x u = \partial_y v$$
und
$$\partial_x \tilde{v} = -\partial_y \tilde{u}, \quad \partial_x \tilde{u} = \partial_y \tilde{v}$$
erfüllen. Man sagt, für die komplexen Funktionen f, g selbst gelten die CR-Differentialgleichungen. Zeigen Sie, dass für fg wieder die CR-Differentialgleichungen gelten.
Hinweis: Man betrachte $(x,y) \mapsto fg(x + \mathrm{i}y) = f(x + \mathrm{i}y)g(x + \mathrm{i}y)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, auf dem jeweiligen Definitionsbereich die CR-Differentialgleichungen gelten.
Hinweis: Man betrachte $n = -1, 0, 1$, der Rest folgt mit (a) durch Induktion.

(c) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral $\oint_{\gamma_\epsilon} z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$, wenn γ_ϵ die gegen den Uhrzeigersinn laufende Kreislinie mit Radius ϵ und Mittelpunkt im Ursprung parametrisiert. Was kann man über dieses Wegintegral für Kreislinien mit anderem Mittelpunkt aussagen?

Tutoraufgaben

T5.1. Flächenberechnung durch ein Kurvenintegral

a) Es sei $\gamma : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t, \sqrt{1/4 - t^2}, \sqrt{3}/2)$. Das Vektorfeld $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $u(x) = (x_3^2, 0, 2x_1x_3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma \langle u(x), \mathrm{d}x \rangle$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit C^1-Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenfeld $\mathbf{n}$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene C^1-Kurve mit den folgenden Eigenschaften:
(i) $\gamma([0,1]) = \partial\Omega$, (ii) $\gamma : (0,1) \to \gamma((0,1))$ ist Karte von $\partial\Omega$,
(iii) für alle $t \in (0,1)$ gilt $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{n}(\gamma(t))$.
Beweisen Sie: $\displaystyle \frac{1}{2} \int_0^1 \big(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \mathrm{d}x\,.$

T5.2. Induzierte Orientierung einer Randkurve

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| = 1,\ x_3 > 0\}$ und $\Phi : B_1(0) \to M$, $\Phi(x_1, x_2) := (x_1, x_2, \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)})$. Für $\Omega_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|^2 < \frac{3}{4}\right\}$ und $\Omega_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{3}{4} < |x|^2 < \frac{15}{16}\right\}$ seien $A_j := \Phi(\Omega_j)$, $\partial A_j := \Phi(\partial\Omega_j)$, $j = 1, 2$.

a) Geben Sie das stetige Normalenfeld $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^3$ an, das $\mathbf{n}(0,0,1) = (0,0,1)$ erfüllt.

b) Geben Sie für $j \in \{1,2\}$ die durch $\mathbf{n}$ auf ∂A_j induzierte Orientierung τ_j an.

T5.3. Ein magnetischer Monopol besitzt kein Vektorpotential

Gegeben ist das Vektorfeld $B(x) = \frac{x}{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $A : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ offen heißt Vektorpotential von B auf U, wenn $\operatorname{rot} A = B$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass B auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Satz von Stokes für ein geeignetes Flächenstück.

(b) Warum gibt es auf $\mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}_0^+)$ ein Vektorpotential A von B? Hinweis: Analysis 2, letztes Semester.

Hausaufgaben

H5.1. Kurvenintegral

Es sei $\gamma : (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t, 0, \sqrt{1-t^2})$. Das Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $\mathbf{u}(x) = (x_3^2, 0, 2x_1x_3)$. Berechnen Sie $\int_\gamma \langle \mathbf{u}(x), \mathrm{d}x \rangle$.

H5.2. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$

Es sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \sin(x_1) - 3x_1^2x_2 - x_2^3 \\ \cos(\mathrm{e}^{x_2}) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int_{S^1} \langle \mathbf{v}(x), \mathrm{d}\tau \rangle$, wobei S^1 durch τ im mathematischen Sinn orientiert ist.

H5.3. Satz von Stokes, Klausuraufgabe

Gegeben sei $S_+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$, so orientiert, dass das Normalenfeld vom Ursprung weg zeigt, und das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + 4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2 + z^2) + e^{4y^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} F$ durch S_+ mit Hilfe des Satzes von Stokes einmal als Linienintegral und als möglichst einfaches Flächenintegral.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 23.11.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude