TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. SIMONE WARZEL
DR. MICHAEL PRÄHOFER

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 4
(5.11.2015)

Zentralübung

Z4.1. C^1-Ränder sind Untermannigfaltigkeiten

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit C^1-Rand. Begründen Sie, dass $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist.

Z4.2. Divergenz als Quellstärke

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \Omega$

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_n(B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} \langle F(y), \mathrm{n}(y)\rangle \mathrm{d}S(y) = \mathrm{div}F(x)$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\mathrm{n}(y)$ das äußere Normalenfeld an $\partial B_r(x)$.

Z4.3. Mehrdimensionale partielle Integration

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand und dem äußeren Normalenfeld n und $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie, dass für alle $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\int_\Omega (\partial_j f)(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(y)g(y)\mathrm{n}_j(y)\mathrm{d}S(y) - \int_\Omega f(x)(\partial_j g)(x)\mathrm{d}x.$$

Z4.4. Fluss durch eine Kugelsphäre

Es sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$ und $\mathrm{n}(y)$ die äußere Normale an ∂U in $y \in \partial U$ ist. Drücken Sie

$$\int_{\partial U} \langle f(y), \mathrm{n}(y)\rangle \, \mathrm{d}S(y)$$

für $f(x, y, z) := (x + y \sin z, y, \mathrm{e}^x)$ direkt mit Hilfe einer Parametrisierung der Oberfläche aus.

Tutoraufgaben

T4.1. Fluss durch eine Kugelsphäre mit Satz von Gauß

Es sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$ und $\mathrm{n}(y)$ die äußere Normale an ∂U in $y \in \partial U$ ist. Berechnen Sie

$$\int_{\partial U} \langle f(y), \mathrm{n}(y)\rangle \, \mathrm{d}S(y)$$

für $f(x, y, z) := (x + y \sin z, y, e^x)$ mit Hilfe des Satzes von Gauß.

T4.2. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{|x|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz von E.

(b) Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0)$, $R > 0$.

(c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, $0 \notin \partial\Omega$. Berechnen Sie $\int_{\partial\Omega} \langle E, \mathrm{n}\rangle \mathrm{d}S$ für die beiden Fälle $0 \notin \overline{\Omega}$ und $0 \in \Omega$. HINWEIS: Satz von Gauß.

T4.3. Die Formel von Green

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit C^1-Rand und äußerem Normalenfeld n und $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Richtungsableitung von g in $x \in \partial\Omega$ entlang n ist definiert als

$$\partial_{\mathrm{n}} g(x) = \langle \operatorname{grad} g(x), \mathrm{n}(x) \rangle.$$

Beweisen Sie die Formel von Green

$$\int_\Omega (f \Delta g) \mathrm{d}^n x = \int_{\partial\Omega} f \partial_{\mathrm{n}} g \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle \mathrm{d}^n x.$$

Hausaufgaben

H4.1. Integration auf S^{n-1}

a) Wenden Sie den Satz von Gauß auf das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v(x) = x$, und das Gebiet $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ an und diskutieren Sie das Ergebnis.

b) Berechnen Sie

$$\int_{S^{n-1}} x^T A x \, \mathrm{d}S(x)$$

für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

H4.2. Anwendung der mehrdimensionalen partiellen Integration

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand und äußerem Normalenfeld n und sei $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein divergenzfreies Vektorfeld, das tangential zu $\partial\Omega$ verläuft, d.h., $\langle F(x), \mathrm{n}(x) \rangle = 0$ für $x \in \partial A$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_\Omega \langle F(x), \operatorname{grad} f(x) \rangle \mathrm{d}^n x = 0.$$

H4.3. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Sei ∂M der nach außen orientierte Rand des Paraboloidenstumpfes

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, \, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld definiert durch $f(x, y, z) := (x+y, y+z, x+z)$. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Rand von M (a) direkt, (b) mit dem Satz von Gauß.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 16.11.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude