TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 3
(29.10.2015)

Zentralübung

Z3.1. Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals

Seinen $\Phi : V \to U$ und $\Psi : \tilde{V} \to U$ Karten einer kompakten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar über $U = \Phi(V) = \Psi(\tilde{V}) \subset M$. Man zeige

$$\int\limits_V f(\Phi(u))\sqrt{g^\Phi(u)}\mathrm{d}u = \int\limits_{\tilde{V}} f(\Psi(\tilde{u}))\sqrt{g^\Psi(\tilde{u})}\mathrm{d}\tilde{u}.$$

Z3.2. Einfache Beispiele für Oberflächenintegrale

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegelmantels

$$M = \{(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3 \,|\, z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}$$

(a) durch Parametrisierung als Graph einer Funktion,

(b) durch Parametrisierung in Zylinderkoordinaten,

(c) durch geometrische Betrachtung.

Tutoraufgaben

T3.1. Flächeninhalt und 3-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^4$

(a) Welche Fläche besitzt das von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ und $v_2 = (1, 1, 1, -1)$ im $\mathbb{R}^4$ aufgespannte Parallelogramm?

(b) Welches Volumen hat der von den Vektoren v_1, v_2 und $v_3 = (1, 1, -1, 1)$ aufgespannte Spat?

(c) Veranschaulichen Sie die in (a) und (b) betrachteten Mengen.

T3.2. Kurvenlänge als Oberflächenintegral

Sei die kompakte eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ durch die geschlossene Kurve $\gamma : I \to \Gamma$ mit $I = [a, b]$ parametrisiert. Zeigen Sie, dass für die Bogenlänge von γ, $L(\gamma)$, gilt: $L(\gamma) = \int\limits_\Gamma \mathrm{d}S(x)$.

T3.3. Oberflächenintegrale

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt

(a) des Graphen G_f von $f(x, y) = xy$ für $x^2 + y^2 \leq 1$,

(b) des Torus im $\mathbb{R}^3$, $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, (R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 = r^2\}$, $0 < r < R$,

(c) des 2-dimensionalen Torus im $\mathbb{R}^4$, $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3^2 + x_4^2 = r^2\}$, $R, r > 0$.

Hausaufgaben

H3.1. Fläche eines Sattels

Gegeben ist die Fläche $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^2 - z = 0\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt jeweils von

(a) $S_1 = S \cap \{x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(b) $S_2 = S \cap \{|x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$ (Reduzieren Sie auf ein Einfachintegral, welches z.B. per Computeralgebra-Programm und/oder numerisch ausgewertet werden soll),

(c) $S_3 = S \cap \{|x| + |y| \leq \sqrt{2}\}$,

Als Parametrisierungen stehen zur Auswahl: (x, y) oder (u, v) mit $u = x + y$, $v = x - y$ oder (r, ϕ) mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Benutzen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{c+t^2}}\mathrm{d}t = \ln(t + \sqrt{c + t^2}) + C$.

H3.2. Der Flächeninhalt der n-Sphäre

Die obere Hälfte der n-dimensionalen Kugelsphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, |x| = 1\}$, ist Graph der Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$.
Hinweis: Für das Volumen der n-dimensinalen Einheitskugel, V_n, gilt: $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$.

(a) Zeigen Sie, dass der n-dimensionale Flächeninhalt A_n von S^n gleich $2\pi V_{n-1}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle $\int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \pi$ für $a > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $A_{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(V_n R^n)\big|_{R=1}$ gilt.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 9.11.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude