TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Simone Warzel
Dr. Michael Prähofer

Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3) MA9204

Wintersemester 2015/16
Blatt 1
(15.10.2015)

Zentralübung

Z1.1. Der Graph einer stetigen Funktionen auf Kompaktum ist Jordan-Nullmenge

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Graph von f eine Jordan-Nullmenge ist. Hinweis: Man benutze gleichmäßige Stetigkeit.

Z1.2. Das Integral über Nullmengen ist Null

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und J-messbar, $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist $f(x) = 0$ für J-f.a. $x \in A$, so ist f Riemann-integrierbar mit $\int\limits_A f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Z1.3. Cavalierisches Prinzip

(a) Aus dem Satz von Fubini folgt ein nützliches Reduktionsverfahren zur Volumenberechnung einer Jordan-messbaren Menge $K \subset \mathbb{R}^d$.
Sind auch alle Schnittflächen $K_z := \{x \in \mathbb{R}^{d-1} \,|\, (x,z) \in K\} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ Jordan-messbar, so gilt mit $a := \inf\{z \in \mathbb{R} \,|\, K_z \neq \emptyset\}$, $b := \sup\{z \in \mathbb{R} \,|\, K_z \neq \emptyset\}$,

$$\mathrm{Vol}\,(K) = \int_a^b \mathrm{Vol}\,(K_z)\mathrm{d}z.$$

(b) Es sei $B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ eine J-messbare Menge mit Volumen $\mathrm{Vol}\,(B)$ und $h > 0$ eine positive Zahl (Höhe). Bestimmen Sie das Volumen des Kegels mit der Basis B,

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, y \in [0,h],\ x \in \left(1 - \tfrac{y}{h}\right) B\right\} .$$

Tutoraufgaben

T1.1. Normalbereiche

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Vertauschen Sie für $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ die Integrationsreihenfolge und begründen Sie ihre Schritte.

T1.2. Cavalierisches Prinzip

a) Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Standardsimplex

$$\Delta^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + \ldots + x_n \leq 1\right\} .$$

b) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine J-messbare Menge mit positivem Volumen V. Mit $s_i := \frac{1}{V} \int_K x_i \, d^n x$ für alle $i = 1, \ldots, n$ heißt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ der *Schwerpunkt* der Menge K. Berechnen Sie den Schwerpunkt für $K = \Delta^n$.

T1.3. Satz von Fubini

(a) Integrieren Sie $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2}$ über die Menge $M = \left\{(x,y) \,\middle|\, x,y \geq 0,\ y \leq x \leq 1\right\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral, indem Sie den Integranden als bestimmtes Integral interpretieren:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x, \qquad 0 < a < b.$$

Hausaufgaben

H1.1. Schwerpunkt und Trägheitstensor eines Oktaeders

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie Volumen $\mathrm{Vol}(M)$, Schwerpunkt $\vec{S}_M$ und Trägheitstensor J_M von M,

$$\vec{S}_M = \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int\limits_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x, \quad J_M = \int\limits_M \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x.$$

H1.2. Volumen der n–dimensionalen Kugel

Sei $V_n(R) \in \mathbb{R}$ das Volumen der n–dimensionalen Kugel $K_n := \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| \leq R\}$ mit Radius $R > 0$, $V_n := V_n(1)$.

(a) Man zeige: $V_n(R) = R^n V_n$ mit Hilfe des Cavalierischen Prinzips.

(b) Man zeige: $V_{n+1} = V_n I_n$ mit $I_n := \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - s^2}^{\,n} \mathrm{d}s$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $V_0 := 1$, und damit $V_n = \prod\limits_{j=0}^{n-1} I_j$.

(c) Durch die Substitution $s = \sin\phi$ finde man eine Rekursionsgleichung für I_n und zeige $I_{n-1}I_{n-2} = \frac{2\pi}{n}$ für $n \geq 2$.

(d) Zeige: $V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ für $n{\in}\mathbb{N}$, wobei $\Gamma(\frac{1}{2}){=}\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1){=}1$ und $\Gamma(x+1){=}x\Gamma(x)$, $x > 0$.

H1.3. Das Jordan-Volumen der Zykloidenfläche

Die Zykloidenfläche Z ist die durch $[0, 2\pi] \times \{0\}$ und die Spur $\gamma([0, 2\pi])$ der Zykloide $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ berandete abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige: Z ist die Fläche unter dem Graphen einer stetigen Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Hinweis: Kann $x = \gamma_1(t)$ nach t aufgelöst werden?

(b) Berechnen Sie das Riemann-Integral für $\mathrm{Vol}\,(Z)$ mittels geeigneter Substitution.

Hausaufgabenabgabe: Montag, 26.10.2015, bis 10:00 im Briefkasten, Keller FMI-Gebäude