Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 9

Notiztitel 10.12.2013

Identitätssatz

$f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet (offen und zush.), $z_0 \in U$

$$f = g \iff \begin{cases} f(z) = g(z) \text{ für } z \in B_\epsilon(z_0) \subseteq U \\ f(z_n) = g(z_n) \text{ für } z_n \to z_0 \\ f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \text{ für } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Anwendung: Gibt es bei 0 holomorphe Funktionen f mit $(n \in \mathbb{N})$

(i) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$? Ja, $f(z) = z$ eindeutig (Identitätssatz)

(ii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$? Ja, $f(z) = z^2$ eindeutig

(iii) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$? Nein, sonst wäre $\mathbb{C} \ni f'(0) = \lim \frac{f(1/n) - \overset{0}{\overset{\|}{f(0)}}}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ ↯

(iv) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$? Nein. Für $n > 0$ muss (wg (i)) $f(z) = z$ gewählt werden, aber dann wäre $f(-1) = -1 \neq 1 = \frac{1}{|-1|}$

"Gegenbeispiele"
- $f(z) = \sin(\pi z)$, $g(z) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$
  $\mathbb{Z}$ besitzt keinen HP in $\mathbb{C}$ und $f \neq g$ beide ganz

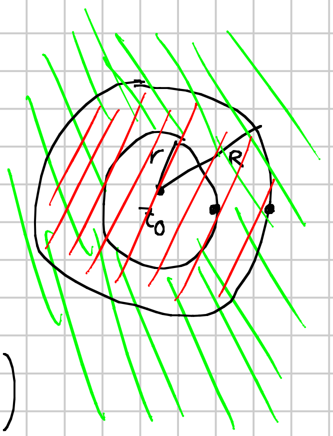
<u>Aber</u>: f, g ganz mit $f(0) = g(0)$ und $f - g$ beschränkt
$\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ $f - g$ ist konstant, also $f(z) - g(z) = f(0) - g(0) = 0 \Rightarrow f = g$

- $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$, $g(z) = 0$. $f(z) = g(z)$ für $z \in \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ mit HP 0
  Aber f ist in 0 nicht holomorph fortsetzbar (wes. Singularität)

Laurentreihen und Klassifikation isolierter Singularitäten

Ist $f: K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist

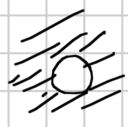
$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{Hauptteil} \\ \text{abs. kgt auf } K_{r,\infty}(z_0)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}_{\substack{\text{Nebenteil} \\ \text{abs kgt auf } B_R(z_0)}}$$



z.B. $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ Laurententwicklung um $z_0 = 0$

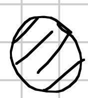
auf $K_{0,1}(0)$, $\underline{K_{1,2}(0)}$, $K_{2,\infty}(0)$

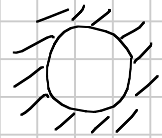
$$\frac{1}{z-1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-z} = -1 - z - z^2 - \dots & \text{für } |z|<1 \\ \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\left(\frac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{z}\left(1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dots\right) & \text{für } |z|>1 \end{cases}$$



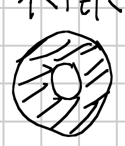
Genauso

$$\frac{1}{z-2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{z}{2} + \dfrac{z^2}{4} + \dots\right) & \text{für } |z|<2 \\ \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} = \dfrac{1}{z}\left(1 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{4}{z^2} + \dots\right) & \text{für } |z|>2 \end{cases}$$





Auf $K_{1,2}(0)$: $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \underbrace{\dots - \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} \underbrace{- \dfrac{1}{2} - \dfrac{z}{4} - \dfrac{z^2}{8} - \dots}_{\text{Nebenteil}}$ für $1<|z|<2$



Isolierte Singularitäten

$f: U\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, U offen, $z_0 \in U$, dann ist z_0 eine isolierte Singularität von f. Für $K_{0,r}(z_0) \subseteq U$ besitzt f eine dort konvergente Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z-z_0)^k$$

Hauptteil ist $0 \Leftrightarrow f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z-z_0)^k \Leftrightarrow z_0$ ist hebbare Singularität

Hauptteil ist endliche Summe $\Leftrightarrow \sum_{k\geq -N} c_k (z-z_0)^k$, $c_{-N} \neq 0$

$\Leftrightarrow z_0$ ist Pol N-ter Ordnung

andernfalls ist z_0 wesentliche Singularität.

Bsp: $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ $\underline{\text{bei } z_0 = 0}$: hebbare Singularität.

Denn $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z}} = \frac{1}{\sin'(0)} = 1$.

f ist stetig fortsetzbar bei 0. Nach dem Riemannschen Hebbarheitssatz ist die stetige Fortsetzung von f sogar holomorphe Fortsetzung.

bei $z_0 = \pi$: $\lim\limits_{\substack{x\to\pi^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \infty$, f ist unbeschr. in jeder Umgebung von π

Wegen $\lim\limits_{z\to\pi} (z-\pi) f(z) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{C}}} h \cdot \frac{\pi+h}{\sin(\pi+h)} = \lim\limits_{h\to 0} (\pi+h) \frac{h}{-\sin h} = -\pi$

ist π hebbare Singularität von $(z-\pi)f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-\pi)^k$.

Also ist $f(z) = \underbrace{\frac{c_0}{z-\pi}}_{\text{Hauptteil}} + c_1 + c_2(z-\pi) + c_3(z-\pi)^2 + \cdots$

d.h. π ist einfacher Pol (Pol erster Ordnung) von f.

<u>Nullstellen</u>: Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, U offen, $z_0 \in U$

Dann heißt z_0 k-fache Nullstelle von f, wenn $c_k \neq 0$

und $f(z) = \sum_{l\geq k} c_l (z-z_0)^l = (z-z_0)^k \underbrace{\left(c_k + c_{k+1}(z-z_0) + c_{k+2}(z-z_0)^2 + \cdots\right)}_{\tilde f(z) \text{ hol mit } \tilde f(z_0) \neq 0}$

- Besitzt f eine k-fache Nullstelle bei $z_0 \in U$, dann hat $\frac{1}{f}$ ein Pol k-ter Ordnung bei z_0, denn

  $f(z) = (z-z_0)^k \tilde f(z)$ mit $\tilde f$ hol. und $\tilde h(z_0) \neq 0$, also ist

  $$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\frac{1}{\tilde f(z)}}_{\text{holomorph bei } z_0} = \frac{1}{(z-z_0)^k} \sum_{l\geq 0} \tilde c_l (z-z_0)^l$$

- Besitzt f eine k-fache und g eine l-fache Nullstelle bei z_0

  so hat $\frac{f}{g}$ bei z_0 $\begin{cases} \text{eine } k-l \text{ fache Nullstelle für } k>l \\ \text{eine hebbare Singularität mit } \frac{f}{g}(z) \neq 0 \text{ für } k=l \\ \text{einen Pol } (l-k)\text{-ter Ordnung für } k<l \end{cases}$

Bsp.: $\frac{e^z - 1}{z}$ ist eine ganze Funktion $\left(e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right.$, also einf. Nullst.)

- $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ hat einen einfachen Pol bei $z = 0$

Also $\cot z = \frac{\mathrm{Res}_0(\cot)}{z} +$ Nebenteil

$$\mathrm{Res}_0(\cot) = \mathrm{Res}_0\left(\frac{\cos}{\sin}\right) = \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 1$$

$\Rightarrow$ $\cot z - \frac{1}{z}$ ist holomorph bei $z = 0$

(genauer: besitzt bei $z = 0$ eine hebbare Singularität

Partialbruchzerlegung von gebrochenrationalen Funktionen

Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome ohne gemeinsame Nullstellen und $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$

Fundamentalsatz der Algebra: $q(z) = \alpha (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_n)^{k_n}$, $z_1, \dots, z_n$ paarweise verschieden (p.v.). D.h. z_j ist k_j-fache Nullstelle von q. Wegen $p(z_j) \neq 0$ ist z_j ein Pol k_j-ter Ordnung von f.

Sei $H_j(z) = \sum_{\ell=1}^{k_j} c_{-\ell}^{(j)} (z - z_j)^{-\ell}$ der Hauptteil von f bei z_j

Beh.: $f(z) = \sum_{j=1}^{n} H_j(z)$

Bew: Sei $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} H_j(z)$ hat bei z_j hebbare Singularitäten, ist also ganz

Außerdem ist $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| \leq \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| + \lim_{|z|\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |H_j(z)| = 0$

$\Rightarrow$ g ist beschränkt $\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ g ist konstant $\overset{\lim_{|z|\to\infty} g(z)=0}{\Longrightarrow}$ $g = 0$ $\boxed{\checkmark}$

Anwendung: Besitzt $q(z)$ nur einfache Nullst z_j, $j=1,\dots,n$, so ist (mit obigen Bed. an p)

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Res}_{z_j}\left(\frac{p}{q}\right)}{z-z_j} \overset{\text{Vorl.}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{p(z_j)}{q'(z_j)}}{z-z_j}$$

wobei $q'(z_j) = \lim_{z\to z_j} \frac{q(z)-q(z_j)}{z-z_j} = \alpha(z_j-z_1)\cdots\widehat{(z_j-z_j)}\cdots(z_j-z_n)$