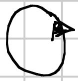
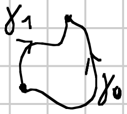
Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 8

Notiztitel 03.12.2013

Homotopie von Kurven.

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma : [0,T] \to U$ Kurve

- γ geschlossen heißt nullhomotop in U, wenn es eine stetige Deformation von γ zu einer konstanten Kurve gibt, d.h. es gibt stetiges $F : [0,1] \times [0,T] \to U$ mit $F(0,t) = \gamma(t)$ und $F(1,t) = z_0 \in U$
- Bsp.  Üb.
- U ist einf. zush. wenn jede geschlossene Kurve in U nullhomotop in U ist.
- γ_0 ist homotop zu γ_1 in U wenn $\gamma_0 - \gamma_1$ nullhomotop ist (${\gamma_0, \gamma_1}$ haben gleiche Endpunkte)

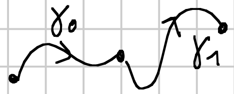


Bemerkung: $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ seien Kurven

Die Kurve $-\gamma_1$ ist $(-\gamma_1)(t) := \gamma_1(1-t)$

Falls $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$: Dann ist $\gamma_0 + \gamma_1 : [0,2] \to U$

$$(\gamma_0 + \gamma_1)(t) := \begin{cases} \gamma_0(t), & t \leq 1, \\ \gamma_1(t-1), & t > 1. \end{cases}$$

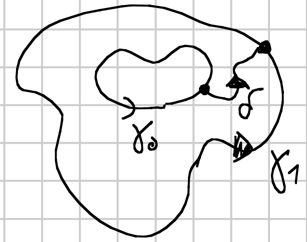


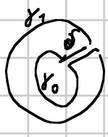
Schließlich $\gamma_0 - \gamma_1 := \gamma_0 + (-\gamma_1)$ falls $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$

Achtung: nicht kommutativ, aber sehr praktische Notation

Definition: γ_0, γ_1 geschlossene Kurven heißen frei homotop in $U \subseteq \mathbb{C}$, wenn es eine Kurve $\delta : [0,1] \to U$ mit $\delta(0) = \gamma_0(0)$, $\delta(1) = \gamma_1(0)$ gibt und γ_0 homotop ist zu $\delta + \gamma_1 - \delta$.

(bzw. $\delta + \gamma_1 - \delta - \gamma_0$ ist nullhomotop)



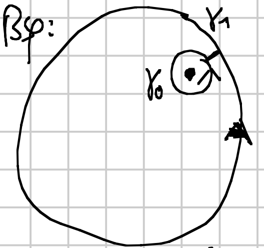


Korollar zum Satz von Cauchy-Goursat

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sind γ_0, γ_1 geschlossene Kurven frei homotop in U, dann ist

$$\oint_{\gamma_0} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

Bsp:



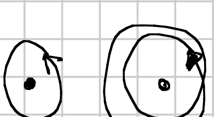
Bemerkung: Freie Homotopie ist Äquivalenzrelation für geschlossene Kurven in U.

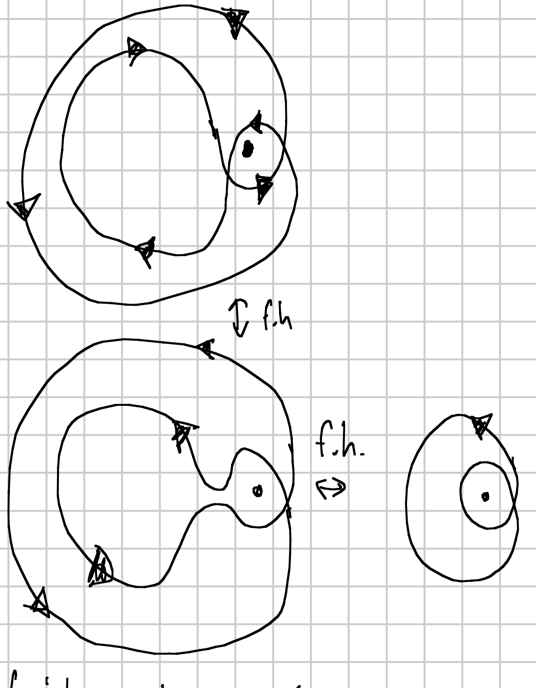
Beispiel: $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}$

Beh: Für $n \neq m$ ist γ_n nicht frei homotop zu γ_m in $\mathbb{C}^\times$

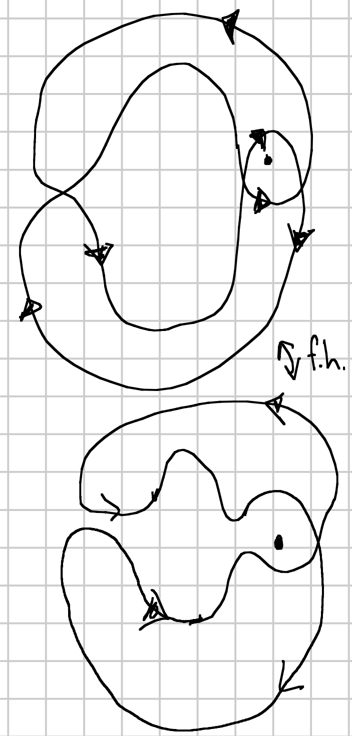
Bew: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \oint_{\gamma_n} \frac{dz}{z} \neq \oint_{\gamma_m} \frac{dz}{z}$, denn

$$\int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{2\pi i n\, e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}}\,dt = 2\pi i n$$

 nicht frei homotop

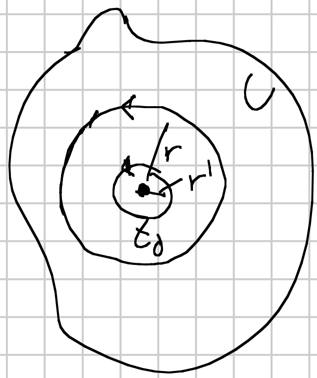


freihomotop zu γ_2



nullhomotop

Cauchy Integralformel



$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$, dann ist

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz}$$

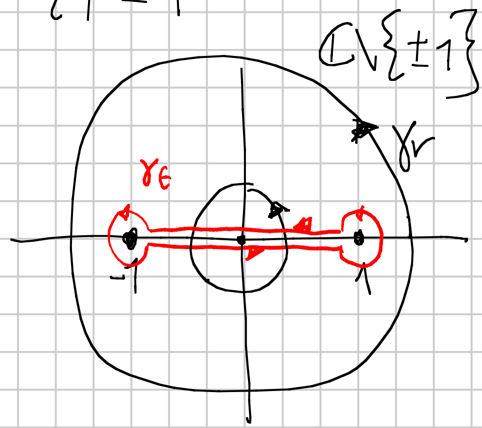
Bemerkungen:
- Für $f(z) = const = f(z_0)$ durch Ausrechnen
- Wegen Stetigkeit von f ist

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = f(z_0)$$

- Wegen freier Homotopie von $\gamma_r, \gamma_{r'}$ ist $\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$ unabhängig von r.

<u>Anwendung</u>: $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ für $z \neq \pm 1$

$= \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}$



Berechne: $I_r := \oint\limits_{|z|=r} f(z)\,dz, \; r>0$

Für $r<1$: $I_r = 0$ (Cauchy-Goursat)

Für $r=1$: nicht definiert

Für $r>1$: γ_r und γ_ϵ sind frei homotop in $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\} \Rightarrow$

$$\oint\limits_{|z|=r} f(z)\,dz \overset{f.h.}{=} \oint\limits_{\gamma_\epsilon} f(z)\,dz \overset{tr.}{=} \oint\limits_{|z+1|=\epsilon} f(z)\,dz + \oint\limits_{|z-1|=\epsilon} f(z)\,dz = 0 \quad ✓$$

$$\int\limits_{|z+1|=\epsilon} f(z)\,dz = \underbrace{\oint\limits_{|z+1|=\epsilon} \frac{1/2}{z-1}\,dz}_{=0 \text{ wegen C-G}} - \underbrace{\oint\limits_{|z+1|=\epsilon} \frac{1/2}{z+1}\,dz}_{2\pi i \cdot 1/2} = -\pi i$$

direkt oder mit C-Integralformel

Analog:
$$\oint\limits_{|z-1|=\epsilon} f(z)\,dz = \underbrace{\int\limits_{|z-1|=\epsilon} \frac{1/2}{z-1}\,dz}_{=2\pi i \cdot 1/2} - \underbrace{\oint\limits_{|z-1|=\epsilon} \frac{1/2}{z+1}\,dz}_{=0} = +\pi i$$

$\boxtimes$

Der Hauptzweig des Arcustangens

<u>Wdh.</u> Hauptzweig des Logarithmus: $\ln : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$.

Es gilt $\ln'(z) = \frac{1}{z}$, $\ln(1) = 0$.

ln ist die Umkehrfunktion von $\mathrm{Exp} : \{w \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, w| < \pi\} \to \mathbb{C}^-$

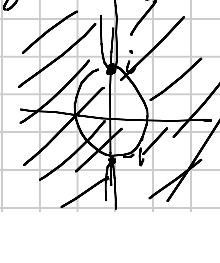
$$\boxed{\text{Für } \varphi \in (-\pi, \pi],\ r > 0 \text{ gilt } \ln(re^{i\varphi}) = i\varphi + \ln r}$$

- Damit ist ln auf $\mathbb{C}^\times (= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ definiert, dort aber nicht holomorph! (unstetig auf $\mathbb{R}^-$)
- $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ (Nullst. des Cos.) aber nicht bijektiv! Der arctan ist Umkehrfunktion einer geeigneten Einschränkung von tan.
- Definition als Stammfunktion von $\frac{1}{1+z^2}$ (Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1. $\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \cdots$ (geom. Reihe)

   Dann ist
   $$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} \pm \cdots \quad \text{(arctan-Reihe)}$$
   Damit kennen wir arctan auf $B_1(0)$ (Kgzradius 1)

2. Cauchy-Goursat: Definiere auf der sternförmigen Menge
   $U_0 := \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$
   $$\arctan(z) = \int_0^z \frac{1}{1+w^2}\, dw$$



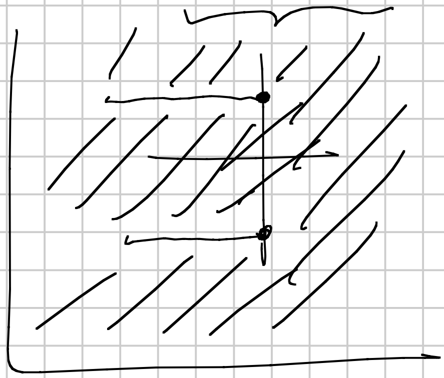
Was kommt dabei heraus:

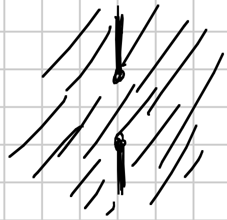
$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}$$

Naiv: Stammfkt von $\frac{i/2}{z+i}$ ist $i/2 \ln(z+i)$ auf $\mathbb{C}^- - i$

Stammfkt von $\frac{i/2}{z-i}$ ist $i/2 \ln(z-i)$ auf $\mathbb{C}^- + i$

$\Rightarrow \frac{i}{2}\left[\ln(z+i) - \ln(z-i)\right]$ ist Stammfkt von $\frac{1}{1+z^2}$ auf $(\mathbb{C}^- - i) \cap (\mathbb{C}^- + i)$





__Beh:__ $\arctan z = \frac{1}{2i}\left(\ln(1+iz) - \ln(1-iz)\right)$ ist Stammfkt von $\frac{1}{1+z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$ mit $\arctan(0) = 0$.

Bew: · Definitionsbereich überprüfen

· Ableiten. ∎