Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 7

Notiztitel 26.11.2013

Warum Funktionentheorie?

Statt Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (oder nach $\mathbb{C}$)
betrachten wir Funktionen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Warum $\mathbb{C}$?

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper: Jedes $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ besitzt ein Inverses
- Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt (mindestens) eine komplexe Nullstelle
- Faktorisierung: $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_n \neq 0 \Rightarrow p(z) = a_n (z-z_1)\cdots(z-z_n)$, Nullst $z_1, \ldots, z_n$
- Sind alle Koeffizienten a_k reell, so sind die Nullst reell oder paarweise komplex konjugiert. (Char. Polynom einer Matrix zur EW Bestimmung)
- Geometrisch: Komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ via $(x+iy) \mapsto (x,y)$

  $e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ entspricht Rotation um Winkel φ, $w \mapsto e^{i\varphi} w$

  $r \geq 0$ entspricht Streckung um Faktor r, $w \mapsto rw$

  $z \in \mathbb{C}$ entspricht Drehstreckung, $\underbrace{w \mapsto zw}$, da $z = |z| e^{i \arg(z)}$

  Allg. Form einer komplex linearen Abb. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Diese sind winkelerhaltend!

- Komplexe Differenzierbarkeit: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen

$f: U \to \mathbb{C}$ ist komplex diffbar in $z_0 \in U$, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0) \quad \text{existiert},$$

und holomorph wenn f' auf U existiert.

Lineare Approximation

f ist komplex diffbar in $z_0 \in U$, g.d.w.

eine $\mathbb{C}$-lineare Abb. $A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert, s.d

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|), \text{ bzw.}$$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + A(h) + o(|h|) \quad (h \in \mathbb{C})$$

$A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linear $\Leftrightarrow$ Es gibt $a \in \mathbb{C}$, s.d. $A(z) = a z$ f.a. $z \in \mathbb{C}$

denn $(a) \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ ist die darstellende Matrix von A

Natürlich ist dann $f'(z_0) = a$, denn

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - A(h)|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a \quad \left(=: f'(z_0) \right)$$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + o(|z - z_0|)$$

- Genau wie im Reellen gilt die Taylorformel: Ist $f: U \to \mathbb{C}$ in z_0 k-mal komplex diffbar, so gilt

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + o(|z-z_0|^n)$$

Große Überraschung:

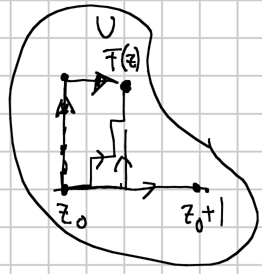
- Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph (also überall einmal komplex diffbar) dann ist auch $f': U \to \mathbb{C}$ holomorph (also unendlich oft komplex diffbar)
- Noch besser: f kann in jedem $z_0 \in U$ in einer Potenzreihe entwickelt werden, die mindestens auf $B_\epsilon(z_0)$ konvergiert, falls $B_\epsilon(z_0) \subseteq U$.

Stammfunktion einer holomorpher Funktion

$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig (Zentrum $z_0 \in U$)

Finde $F: U \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

Sei F eine solche Stammfunktion, mit $F(z_0) = 0$. Dann muss gelten:



Für $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(z_0+t)$

$$\frac{d}{dt} F(z_0+t)\Big|_{t=0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{F(z_0+t) - F(z_0)}{t} = F'(z_0) = f(z_0)$$

genauso $F'(z_0+t) = f(z_0+t)$

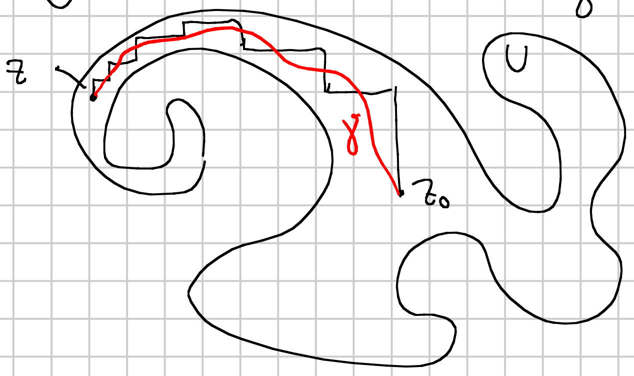
d.h. $$F(z_0+t) = \overset{\circ}{F(z_0)} + \int_0^t f(z_0+t)\, dt \quad \left(= \int_\gamma f(z)\, dz \text{ für } \gamma(s) = z_0 + s,\ s \in [0,t] \right)$$

Für $\mathbb{R} \ni t \mapsto F(z_0+it)$

$$\frac{d}{dt} F(z_0+it)\Big|_{t=0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} i\,\frac{F(z_0+it) - F(z_0)}{it} = i\,F'(z_0) = i f(z_0)$$

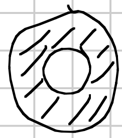
d.h. $$F(z_0+it) = F(z_0) + \int_0^t f(z_0+it)\, i\, dt \quad \left(= \int_\gamma f(z)\, dz \text{ für } \gamma(s) = z_0 + is,\ s \in [0,t] \right)$$

Sei U einfach zusammenhängend

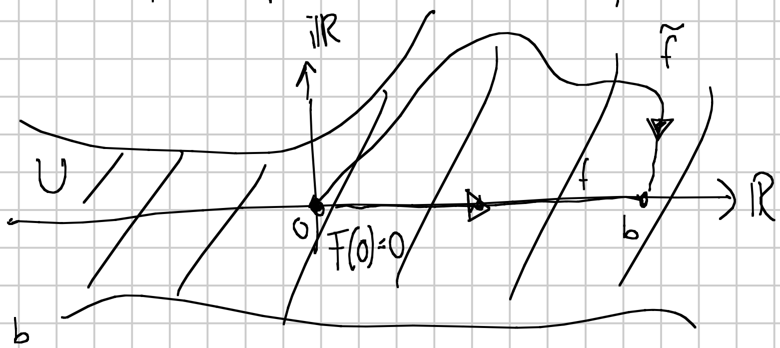


$f: U \to \mathbb{C}$ holomorph

$$F(z) = \underbrace{\int_\gamma f(w)\,dw}_{\int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt} \quad \text{ist Stammfkt von } f$$

Übung: Zeige:  ist nicht einf zush.

Anwendung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei holomorph (d.h. es gibt offene Ugb U von $\mathbb{R}$ auf der $\tilde f: U \to \mathbb{C}$ holomorph ist und $\tilde f|_{\mathbb{R}} = f$)



Um $\underbrace{\int_0^b f(x)\,dx}_{= F(b) =}$ zu berechnen, kann man auch $(F' = \tilde f)$

$$\overbrace{\int_\gamma \tilde f(z)\,dz}$$ berechnen, falls $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = b$

Frage: Gegeben $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wann kann f holomorph auf $U \supseteq \mathbb{R}$ offen fortgesetzt werden?

Bsp: $x \in \mathbb{R}$:
- $f(x) = x^2 - x$: $\tilde f(z) = z^2 - z$, $z \in \mathbb{C}$
- $f(x) = \exp(x)$: $\tilde f(z) = \exp z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$

$\Big\}$ sind holomorphe Funktion eindeutig?

- $f(x) = |x|\,x$
- $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

} besitzen keine holomorphe Fortsetzung auf eine Umgb von $\mathbb{R}$

Beispiele für holomorphe Funktion:

- $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}_0$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z^n + \binom{n}{1} h z^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} h^n z^0 - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} n z^{n-1} + O(|h|)$$
$$= n z^{n-1}$$

- $f(z) = e^z$. $f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^z$, da

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{h}\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots - 1\right) = 1 + \underbrace{\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots}_{\to 0} \xrightarrow{h\to 0} 1$$

- <u>Inverse (Quotientenregel)</u>: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $\neq 0$. Dann ist auch $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ holomorph mit Ableitung analog zum Reellen.

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{f(z)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(z+h)} - \frac{1}{f(z)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z) - f(z+h)}{h\, f(z+h) f(z)} = \lim_{h\to 0} - \frac{\frac{f(z+h) - f(z)}{h}}{f(z+h) f(z)} = - \frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

Also ist auch $f(z) = \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit Ableitung $f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}$ ∎