Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 6

Notiztitel 19.11.2013

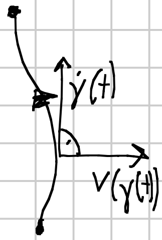
Im $\mathbb{R}^2$:

Kurve : $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (Kurvenparametrisierung)

Ist $\gamma^\circ = \gamma\big|_{(0,1)}$ injektiv, $\gamma'(t) \neq 0$, dann ist γ° Parametrisierung einer eindim. UMF $\Gamma := \gamma((0,1))$. $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Kurvenintegral

$$\boxed{\int_\gamma F(r) \cdot dr = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt}$$



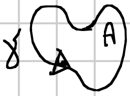
1-dim Oberflächenintegral auf Γ

Normalenfeld: $\nu_\Gamma(x) = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}$ für $x = \gamma(t)$

Gramsche Determinante: $g(t) = \gamma'(t)^T \gamma'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2$

$$\boxed{\int_\Gamma \langle F(x), \nu_\Gamma(x) \rangle \, dS(x) = \int_0^1 \left\langle F(\gamma(t)), \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt}$$

Ist γ eine geschlossene Kurve ($\gamma(0) = \gamma(1)$), positiv orientiert, γ



dann ist $\Gamma = \gamma([0,1])$ der Rand des von γ umschlossenen Gebiets A, $\Gamma = \partial A$ und ν_Γ ist das äußere Normalenfeld von A.

Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ für $G \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$\int_A \operatorname{div} G \, d^2x = \int_\Gamma \langle G, \nu_\Gamma \rangle \, dS$$

Ist nun $G = \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}$ so gilt $\operatorname{div} G = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \operatorname{rot} F$

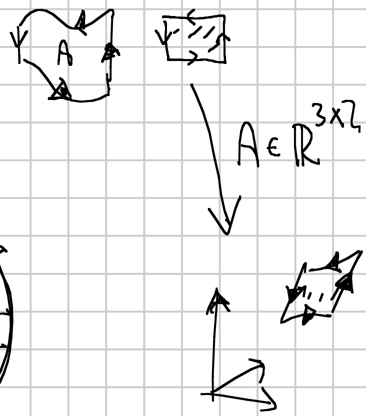
und $\sqrt{g(t)} \langle G, \nu_\Gamma \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot\gamma_2 \\ -\dot\gamma_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle F, \dot\gamma \rangle$.

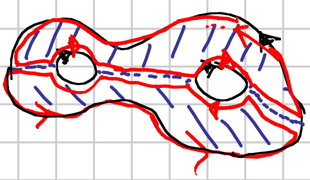
also folgt der Satz von Green (Stokes im $\mathbb{R}^2$)

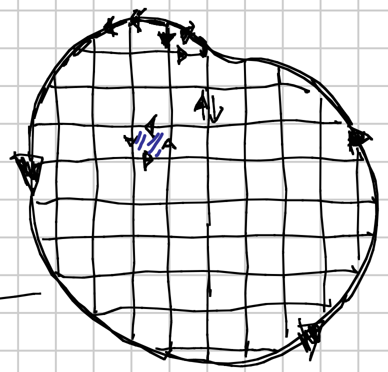
$$\boxed{\int_A \operatorname{rot} F \, d^2x = \int_\gamma F(r) \cdot dr}$$

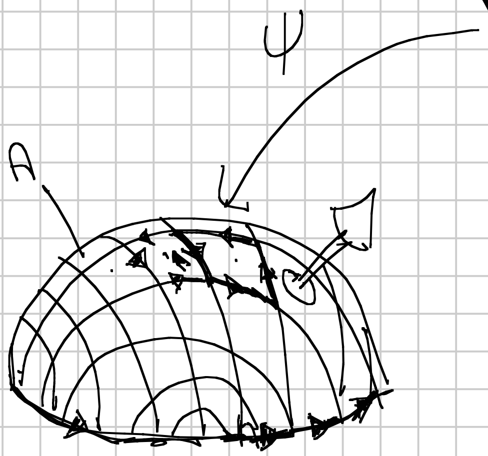
Für die Anschauung

z.B. wenn A ein Normalbereich ist:









$$\int_A \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, dS = \int_{\partial A} F(r) \cdot dr$$

Bedeutung von Divergenz und Rotation für den Fluss eines VF.

Der Fluss $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eines VF $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ (global Lipschitzst.)
beschreibt die Lösung der gew DGL. $\dot{x} = F(x)$ für alle Anfangsbed.,

$x(t) = \phi_t(x_0)$ ist Lsg des AWP $\dot{x} = F(x)$, $x(0) = x_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) = F(\phi_t(x))$$

Insbesondere: $\frac{\partial}{\partial t} \phi_0(x) = F(x)$, da $\phi_0(x) = x$.

- Bsp: F linear, $F(x) = Ax$. Die lin Dgl $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^3$ hat die Lsg $x(t) = e^{tA} x_0$. Der Fluss ist $\phi_t(x) = e^{tA} x$. d.h. $\phi_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist linear.

- Erinnerung: Der Fluss von F durch Flächenstück $\tilde{A}$ ist das Volumen, das pro Zeiteinheit entlang ϕ durch $\tilde{A}$ fließt

- Bedeutung der Divergenz

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt ∂B Nullmenge. Dann ist $B_t := \phi_t(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ die Zeitentwicklung von B entlang F zur Zeit t.
Für das Volumen $V(t) := \mathrm{vol}(B_t)$ gilt

$$\dot{V}(0) = \frac{d}{dt} V(t)\Big|_{t=0} = \int_B \operatorname{div} F \, d^n x$$

Bew: $V(t) = \int_{B_t} d^n x \underset{\phi_t}{\overset{\text{Transf}}{=}} \int_B |\det J_{\phi_t}(x)| \, d^n x$

$$\dot{V}(0) = \int \frac{d}{dt} \det J_{\phi_t}(x) \Big|_{t=0} d^n x$$

Taylorentwicklung von ϕ_t:

$$\phi_t(x) = x + t F(x) + O(t^2)$$

$$J_{\phi_t}(x) = \mathbb{1} + t J_F(x) + \cdots$$

$$\det J_{\phi_t}(x) = \det(\mathbb{1} + t J_F(x) + \cdots) = 1 + t \cdot \underbrace{\operatorname{tr} J_F(x)}_{\partial_1 F_1 + \cdots + \partial_n F_n} + \cdots$$

$$= 1 + t \operatorname{div} F + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(t) \Big|_{t=0} = \int_B \operatorname{div} F \, d^n x \qquad \blacksquare$$

Satz von Gauß: Der Fluss von F durch ∂B ist gleich der Volumenänderung von B_t zur Zeit $t=0$.

Bemerkung: Der Fluss eines konservativen mechanischen Systems erhält das Phasenraumvolumen (Satz von Liouville)

Bedeutung der Rotation

$n=2$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Spezialfall: F linear und antisymmetrisch)

$$F(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 \begin{pmatrix} 0 & a^3 \\ -a^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \mathbb{1}, \ldots$$

$\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ hat Lsg $x(t) = e^{tA} x_0$

Der Fluss $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist $\Phi_t = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix}$.

e^{tA} ist Rotation um den Ursprung mit Winkel at.

$$\operatorname{rot} F(x) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} = \partial_1 (ax_1) - \partial_2(-ax_2) = 2a.$$

$n=3$ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, linear und antisymmetrisch

$$F(x) = a \times x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ antisym.}} x \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}^3$$

Fluss von F: $\Phi_t = e^{tA}$

Wegen $A^T = -A$ ist $\left(e^{tA}\right)^T = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1}$, d.h.

e^{tA} ist Orthogonalmatrix. Wegen $\det\left(e^{tA}\right) = \det e^{0 \cdot A} = 1$ ist e^{tA} Rotation

Wegen $Aa = a \times a = 0$, d.h. a ist EV von A zum EW 0,

ist a EV von e^{tA} zum Eigenwert 1 (a liegt auf der Rotationsachse. Der Rotationswinkel von e^{tA} ist $\|a\|t$ (Eigenwerte $e^{\pm i\|a\|t}$))

Schließlich: $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = 2a$

D.h. die Rotation von F zeigt in Richtung der Rotationsachse.

Ihr Betrag misst die doppelte Winkelgeschwindigkeit.