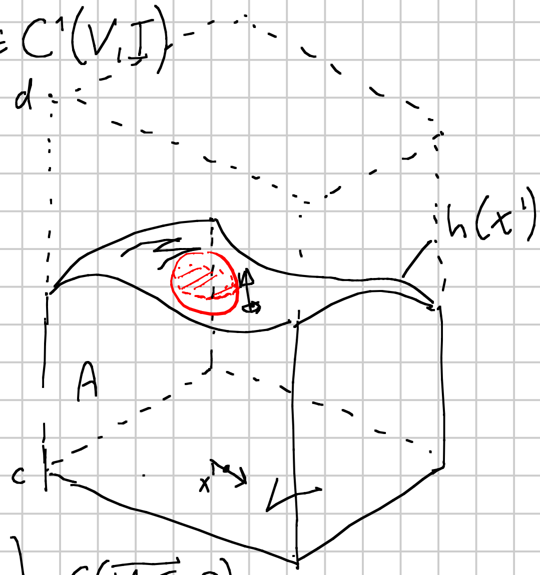
Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 5

Notiztitel 12.11.2013



Lemma (zum Satz von Gauß)

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I=(c,d) \subseteq \mathbb{R}$, $h \in C^1(V,I)$

$$A=\{(x',x_n) \in V \times I \mid x_n \leq h(x')\}$$

$$M=\{(x',x_n) \in V \times I \mid x_n = h(x')\}$$

und $\nu \in C(M, S^{n-1})$ ein aus A hinausZeigendes Normalenfeld.

Dann gilt für jede Funktion $f \in C^1(V\times I,\mathbb{R}) \cap C(\overline{V\times I},\mathbb{R})$ mit kompakten Träger in $V\times I$, und f.a. $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\int_A \partial_j f(x)\, d^n x = \int_M f(x)\nu_j(x)\, dS(x)$$

Beweis: Sei $x' \in V$. Dann ist

$$\nu(\underbrace{x',h(x')}_{\in M}) = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla h(x')\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(x') \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

denn eine Basis von $T_{(x',h(x'))}M$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_j h(x') \end{pmatrix}$ j-te Zeile für $j=1,\dots,n-1$.

zunächst $j=n$: (entspricht VF in e_n-Richtung)

$$\int_A \partial_n f(x)\, d^n x \overset{\text{Fubini}}{=} \int_V d^{n-1}x' \int_C^{h(x')} \partial_n f(x', x_n)\, dx_n \overset{\text{HDI}}{=} \int_V d^{n-1}x' \left(f(x', h(x')) - \underbrace{f(x', c)}_{=0} \right)$$

$$\int_M f(\underset{\mathbb{R}^n}{x})\, \nu_n(x)\, dS(x) = \int_V f(x', h(x'))\, \nu_n(x', h(x'))\, \underbrace{\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}}_{g(x') \text{ zu } \psi(x') = \binom{x'}{h(x')}}\, d^{n-1}x'$$

$$= \int_V f(x', h(x'))\, d^{n-1}x' \quad \circledast$$

jetzt $j < n$:

$$\int_A \partial_j f(x)\, d^n x \overset{\text{Fub}}{=} \int_V d^{n-1}x' \int_C^{h(x')} \partial_j f(x', x_n)\, dx_n$$

und

$$\int_M f(x)\, \nu_j(x)\, dS(x) = -\int_V f(x', h(x'))\, \partial_j h(x')\, d^{n-1}x'$$

NR:
$$\partial_j \left(x' \mapsto \int_C^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n \right) = f(x', h(x'))\, \partial_j h(x') + \int_C^{h(x')} \partial_j f(x', x_n)\, dx_n$$

wegen $\frac{d}{dx} \underbrace{\left(\int_a^x g(x,y)\, dy \right)}_{G(x,x)} = \partial_1 G(x,x) + \partial_2 G(x,x)$, $\quad G(x,z) := \int_a^x g(z,y)\, dy$

$$\int_A \partial_j f(x)\, d^n x = \int_V \left(\partial_j \underbrace{\int_C^{h(x')} f(x', x_n)\, dx_n}_{=: H(x')} - f(x', h(x'))\, \partial_j h(x') \right) d^{n-1}x'$$

Bleibt zu zeigen: erster Term ist 0

$$\int_V \partial_j H(x') \, d^{n-1}x' = \int_{[-r,r]^{n-1}} \partial_j \tilde{H}(x') \, d^{n-1}x' = \int_{[-r,r]^{n-2}} \underbrace{\left(\int_{-r}^{r} \partial_j \tilde{H}(x') \, dx_j \right)}_{\tilde{H}(x_1,\dots,x_{j-1},r,x_{j+1},\dots,x_{n-1}) - \tilde{H}(x_1,\dots,x_{j-1},-r,x_{j+1},\dots,x_{n-1}) = 0} dx_1 \dots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \dots dx_{n-1}$$

$\tilde{H} : [-r,r]^{n-1} \to \mathbb{R}$, C^1, s.d. $V \subseteq [-r,r]^{n-1}$

$$\tilde{H}(x') = \begin{cases} H(x') & \text{für } x' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$= 0$ $\square$

Fluss eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück A

Parametrisierung $\psi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to A \subseteq \mathbb{R}^3$

Vektorfeld: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbar und global Lipschitz stetig.

Dann hat jedes AWP $\dot{x} = F(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung $\tilde{x}_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

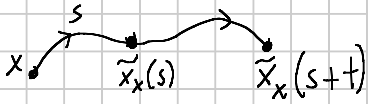
Der Fluss von F ist

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi_t(x_0) := \tilde{x}_{x_0}(t)$$

Bem:
- ϕ ist stetig differenzierbar (o. Beweis)
- $\phi_0(x) = x$
- $\partial_t \phi_t(x) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{x}_{x_0}(t) = F(\tilde{x}_{x_0}(t))$, $J\phi(0,x) = \left(F(x) \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right)$

  $\phi_t(x) = x + t F(x) + \dots$

- $\phi_{s+t}(x) = \phi_t \circ \phi_s(x)$

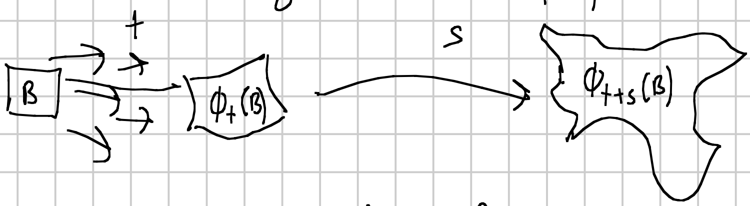


denn $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_t(\tilde{x}_x(s)) = \tilde{x}_{\tilde{x}_x(s)}(t) = \tilde{x}_x(s+t) = \phi_{s+t}(x)$

Insbesondere ist $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$

<u>Interpretation</u> [Mathevital]

$\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist Diffeom. bzw. Transformation, die beschreibt, wie sich eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ in der Zeit von 0 bis t verformt, wenn sie entlang des VF F fließt.



- Fluss durch Flächenstück A mit Normalenfeld ν_A.

Es gilt $\phi_0(A) = A$. Setze $A_t := \phi_t(A)$

Dann ist $V_t := \bigcup_{s \in [0,t]} A_s$ die von A im Zeitintervall $[0,t]$ überstrichene Menge.

Der Fluss von F durch A ist dann (vorausgesetzt $\langle F, \nu_A \rangle > 0$)

$$\mathcal{F}_F(A) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \operatorname{vol}(V_t).$$

Es gilt $\mathcal{F}_F(A) = \int_A \langle F, \nu_A \rangle \, dS = \int_A \langle F(\psi(u)), \partial_1\psi(u) \times \partial_2\psi(u) \rangle \, d^2u$

Beweis: Parametrisierung von V_t durch

$$\chi : [0,t] \times U \ni (s,u) \mapsto \chi(s,u) = \phi_s(\underbrace{\psi(u)}_{\in A}) = \phi \circ \tilde{\psi}(s,u) \in V_t$$

mit $\tilde{\psi}(s,u) = \begin{pmatrix} s \\ \psi(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Somit ist $\mathrm{vol}(V_t) = \int_0^t ds \int_U d^2u \, |\det \chi(s,u)|$ und

$$F(A) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{vol}(V_t) - \mathrm{vol}(V_0)}{t} = \frac{d}{dt} \mathrm{vol}(V_t)\Big|_{t=0} = \int_U d^2u \, |\det \chi(s,u)|$$

$$\int_A \langle F, \nu_n \rangle dS = \int_U d^2u \, \langle F \circ \psi, \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi \rangle$$

Es bleibt zu zeigen

$$|\det J\chi(0,u)| = |\langle F(\psi(u)), \partial_1 \psi(u) \times \partial_2 \psi(u) \rangle|$$

$$J\chi(0,u) = \underbrace{J\phi(\tilde{\psi}(0,u))}_{3 \times 4} \underbrace{J\tilde{\psi}(0,u)}_{4 \times 3}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ F(\psi(u)) & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \; 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & J\psi(u) \\ 0 & \end{array} \right) = \left(F(\psi(u)) \;\; \partial_1 \psi(u) \;\; \partial_2 \psi(u) \right) \quad \square$$