Mathematik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 3

Notiztitel 29.10.2013

Wdh. Lineare Algebra

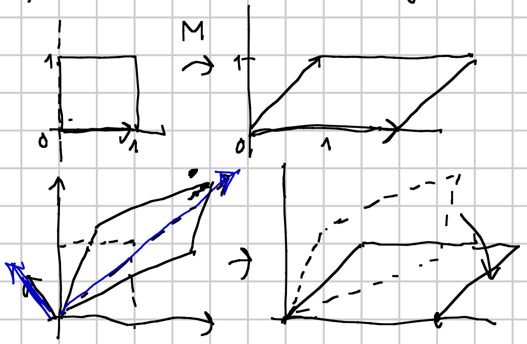
Polarzerlegung von reellen Matrizen

Erinnerung: $c \in \mathbb{C}$: Es gibt $r \geq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, s.d. $c = re^{i\varphi}$

Interpretation: $\mathbb{C} \ni z \mapsto cz \in \mathbb{C}$ ist eine Drehstreckung

Satz (Polarzerlegung von Matrizen) Zu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es $S, O \in \mathbb{R}^{n \times n}$, S symmetrisch, O orthogonal, s.d. $M = OS$

Interpretation: Die Abbildung $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Mx \in \mathbb{R}^n$ ist eine Drehskalierung



Beweis: $M^T M$ ist symmetrisch und positiv semidefinit, denn

- $(M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M$
- $\langle x, M^T M x \rangle = \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|^2 \geq 0$

Setze $S = \sqrt{M^T M}$ $\Big(= \sum_{h=1}^{n} \sqrt{\lambda_h}\, b_h b_h^T$ mit (b_h) ONB aus EV zu EW$_h$ λ_h.

Dann ist nämlich $M^T M = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h \underbrace{b_h b_h^T}_{\substack{n\times 1\ 1\times n \\ n \times n}}$, $M^T M = B \underset{\text{diag}}{\Lambda} B^T$, $B = (b_1 \cdots b_n)$ $\Big)$

zunächst sei $\overset{M}{\underset{}{A}}$ invertierbar.

Dann ist S invertierbar. Beh: $O := M S^{-1}$ ist orthogonal.

$$OO^T = MS^{-1}(S^{-1})^T M^T = M(\underbrace{S^T S}_{S^2 = M^T M})^{-1} M^T = M(M^T M)^{-1} M^T$$

$$= M M^{-1} M^{T^{-1}} M^T = \mathbb{1} \text{ (Einheitsmatrix)}$$

Ist M und damit S nicht invertierbar, setzt man $\tilde{S} := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\tilde{\lambda}_k}\, b_k b_k^T$ mit $\tilde{\lambda}_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda_k \\ \lambda_k & \text{sonst} \end{cases}$

und $O := M\tilde{S}^{-1}$ und zeigt man wieder O orthogonal und $M = OS$ $\blacksquare$

Korollar: Singulärwertzerlegung (für quadratische Matrizen)

Zu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es $\Lambda, U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Λ diagonal, U, V orthogonal, s.d.

$$M = U \Lambda V$$

Beweis: $M = OS = O\underbrace{V^T \Lambda V}_{\text{Diagonalisierung}}$ $\square$

Bemerkung: Für nicht quadratische Matrizen füllt man mit Nullen zu einem Quadrat auf.

(ab jetzt $M \neq A$)

Erinnerung: Daraus ergibt sich $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathcal{J}_n$

$$\mathrm{vol}(MA) = |\det M|\, \mathrm{vol}(A)$$

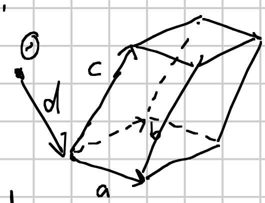
Im $\mathbb{R}^3$: Sei $M = (a\ b\ c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$\det M = \det(a\ b\ c) = a \cdot (b \times c)$ Spatprodukt.

Transformationsformel

$d \in \mathbb{R}^3$

Parallelotop, aufgespannt durch $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ l.u.



$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, u_1, u_2, u_3 \in [0,1] \;\; x = u_1 a + u_2 b + u_3 c + d \right\}$$

Transformation: $g(u) = u_1 a + u_2 b + u_3 c + d = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + d$

- $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist Diffeomorphismus
- $A := [0,1]^3 \Rightarrow P = g(A)$
- $\det J_g(u) = \det(a\ b\ c) \neq 0$.
- A ist Normalbereich (A beschränkt, ∂A ist Nullmenge)

Transformationssatz

$$\boxed{\int_{P = g(A)} f(x)\, d^3x \overset{\text{T.S.}}{=} \int_A f \circ g(u) \left| \det J_g(u) \right| d^3u}$$

$$\mathrm{vol}(P) = \int_P d^3x = \int_A \left| \det J_g(u) \right| d^3u = \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \left| \det(a\ b\ c) \right|$$

$$= \left| \det(a\ b\ c) \right| = \left| a \cdot (b \times c) \right| \quad \square$$

Transformationssatz für Kugelkoordinaten

$$\underbrace{\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \phi(r,\vartheta,\varphi)} \quad \Bigg\} \text{ bedeutet: Definiere } \phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \phi(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\det J_\phi(r,\vartheta,\varphi) = r^2 \sin\vartheta$ wieso?

Polarzerlegung von $J_\phi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & r & r\sin\vartheta \end{array} \\ \Big(\underbrace{\partial_r\phi \quad \partial_\vartheta\phi \quad \partial_\varphi\phi}_{\text{Orthogonalbasis für } r\neq 0 \ \theta\notin\pi\mathbb{Z}}\Big) \end{array}$

$b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ Orthogonalbasis $\Rightarrow \det(b_1 \cdots b_n) = \|b_1\| \cdots \|b_n\|$,

denn $(b_1 \cdots b_n) = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{b_1}{\|b_1\|} & \cdots & \frac{b_n}{\|b_n\|} \end{pmatrix}}_{\text{Orthogonalmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} \|b_1\| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|b_n\| \end{pmatrix}}_{\text{diagonal}}}_{\text{Polarzerlegung}}$

Transformationssatz für Kugelkoordinaten: Sei $f: B_R(0) \to \mathbb{R}$

Riemann-integrierbar $\Rightarrow$

$$\int_{B_R(0)} f(x)\, d^3x = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(\phi(r,\vartheta,\varphi))\, r^2 \sin\vartheta$$

falls alle Einfachintegrale (eigentlich!) existieren.

Bemerkung: Der Satz gilt, da

$$\phi : [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to B_R(0)$$

surjektiv und <u>fast überall</u> injektiv ist (nicht inj auf $\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R}$)

Anwendung: <u>Newtonsche Theorem</u>

Ein Kugelsternhaufen habe mittlere Massendichte $m(x) = \varrho(\|x\|)$, wobei $\varrho(r) = o(r^{-3})$ für $r \to \infty$, stetig.

<u>Satz</u> Ist $M(R)$ die in $B_R(0)$ enthaltene Masse, so ist die Gravitationskraft $-\operatorname{grad} V(x) = -\frac{M(\|x\|)}{\|x\|^2} \frac{x}{\|x\|}$, also so als wäre die Masse innerhalb $B_{\|x\|}(0)$ im Ursprung vereinigt.

Bew: $$M(R) = \int_{B_R(0)} m(x)\, d^3x \overset{\text{T.S.}}{=} \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \varrho(r)\, r^2 \sin\vartheta = 4\pi \int_0^R \varrho(r)\, r^2\, dr$$

$$m \circ \phi(r, \vartheta, \varphi) = \varrho(r)$$

Gravitationspotential $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$V(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{m(y)}{\|x-y\|}\, d^3y$$

ist aus Symmetriegründen radialsymmetrisch. Für $\|x\| = R$ gilt

$$V(x) = V\begin{pmatrix}0\\0\\R\end{pmatrix} = -\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\frac{m(y)}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\R\end{pmatrix} - y\right\|}}_{f(y)}\, d^3y$$

$$f \circ \phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\varrho(r)}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\R\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\end{pmatrix}\right\|} = \cdots$$