Mathematatik 4 für Physik (Analysis 3) Zentralübung 2

Notiztitel 22.10.2013

T2 Mo 16-18 fällt aus

T6a Do 8:30 – 10:00 MI 02.08.011 Badal (parallel zu T6)

Noch Kapazitäten: T3 Di 14-16, T5 Mi 14-16

Sprechstunden der Tutoren: im Anschluss an die Tutorübung

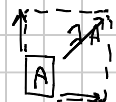
Katharina Amend: Di 14-15 Mi 03.012.0206 (Glaskasten)

Einschub: Mengenschreibweise

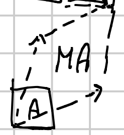
(Verschiebung)

$A \subseteq \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}^3 \qquad x + A := \{x + a \mid a \in A\} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y - x \in A\}$

$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$ Skalierung



$M \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad MA := \{Ma \mid a \in A\}$ lin. Transformation



wohl vertraut, denn für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bel. ist

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

Nullmengen: haben kein Volumen

- Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen (Bsp. $\mathbb{Q}$)
- Graphen Riemann-integrierbarer Funktionen auf Quadern sind Nullmengen
- Graphen stetiger Funktionen auf Normalbereichen sind Nullmengen

- Echte UVR des $\mathbb{R}^r$ sind Nullmengen
- Kompakte Umf$\overset{M}{\text{kn}}$ des $\mathbb{R}^n$ sind Nullmengen (Kodimension ≥ 1)

Denn: Zu jedem $x \in M$ gibt es einen Quader Q_x, s.d. $Q_x \cap M$ der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist, wobei $x \in \mathring{Q}_x$, d.h. $Q_x \cap M$ ist Nullmenge

Da M kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n$, s.d.

$\bigcup_{i=1}^{n} \mathring{Q}_{x_i} \supseteq M$ (endl. Überdeckung.)

$\Rightarrow \quad M = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\mathring{Q}_{x_i} \cap M \right)$ ist Nullmenge.

Integration über Normalbereiche

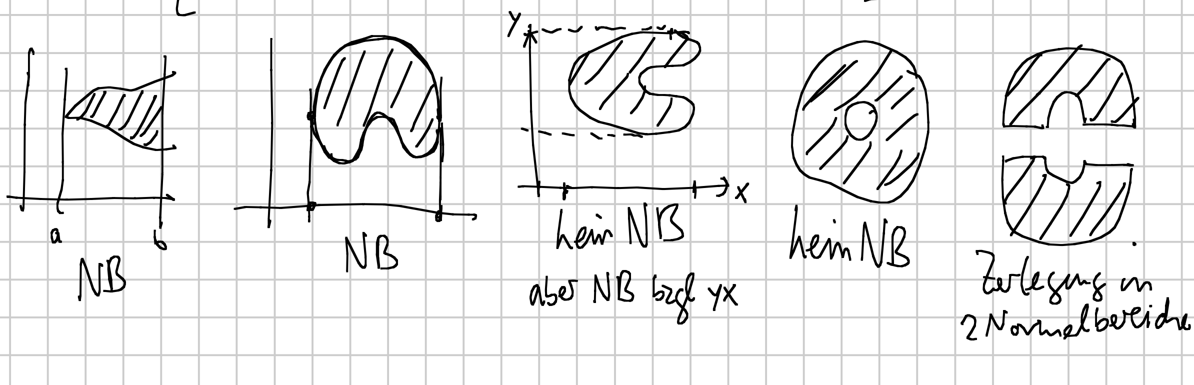
Erinnerung:

$A \subseteq \mathbb{R}^1$ ist Normalbereich, g.d.w. A kompaktes Intervall ist, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b$, s.d. $A = [a, b]$

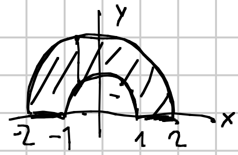
$A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist Normalbereich, wenn es stetige Funktionen $f, g: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Normalbereich und $f \leq g$, s.d

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in B, f(x) \leq y \leq g(x) \right\}$$

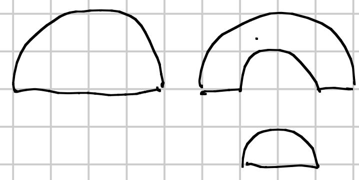
Bsp.:



- $A = \{ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 ;\ y \ge 0 \}$



$h(x,y)$ R-ibar



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > 1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| \le 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{4-x^2} \text{ f. } |x| \le 2$$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ f(x) \le y \le g(x) \}$$

$$\Rightarrow \int_A h(x,y)\, d(x,y) = \int_{-2}^{2} dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy\, h(x,y) = \int_{-2}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, h(x,y) + \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, h(x,y) + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, h(x,y)$$

$$\overset{h \text{ def. auf } \mathbb{R}^2}{=} \int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, h(x,y) - \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, h(x,y)$$

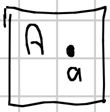
Zusammenfassung: Berechnen von Volumenintegralen:

1. Schreibe als Normalbereich. schwierig!
2. Berechne das geschachtelte Integral "einfach", mechanisch

Uneigentliche Riemann-Integral

Integration über Singularitäten und unbeschränkte Bereiche.

Zunächst: A beschränkt ∂A Nullmenge, f stetig auf A



f kann in einer Ugb von a unbeschränkt sein

A offen: f unbeschränkt am Rand.

$\Rightarrow$ nicht Riemann-Integrierbar!

Ausschöpfende Folge für $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \subseteq A_{k+1} \subseteq A$

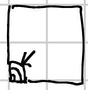
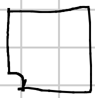
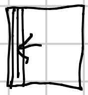
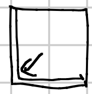
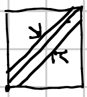
(0) ∂A_k Nullmenge

(i) $\mathrm{vol}(A \setminus A_k)$ existieren

(ii) $\mathrm{vol}(A\setminus A_k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Beispiel: $A = [0,1]^2$

Ausschöpfende Folgen:

- $A_k = A$, • $A_k = A \setminus B_{1/k}(0)$  
- $A_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [0,1]$ 
- $A_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [\frac{1}{k}, 1]$ 
- $A_k = \{(x,y) \in A \mid |x-y| \geq \frac{1}{k}\}$ 

Bei gegebenem $f: A \to \mathbb{R}$ unbeschränkt

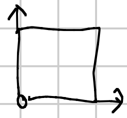
Wähle ausschöpfende Folge A_k, so dass A_k abgeschlossen und $f|_{A_k}$ stetig, beschränkt und damit Riemann-integrierbar

Ist $f(x) \geq 0$ f.a. $x \in A$, dann

$$\int_A f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{A_k} f(x)\,dx}_{\text{monoton wachsend}} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Welche ausschöpfenden Folgen geeignet sind, hängt von f ab!

Das Ergebnis ist aber immer dasselbe!

Bsp: Integral von $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ auf $A=[0,1]^2\setminus\{0\}$ 

Alle (bis auf die erste) oben angegebenen ausschöpfenden Folgen sind geeignet:

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f(x,y)\,d(x,y) \quad \xrightarrow{A_k=[\frac{1}{k},1]\times[0,1]}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_{\frac{1}{k}}^{1}dx\int_0^1 dy\,\frac{1}{x+y} = \lim_{k\to\infty}\int_{1/k}^{1}dx\,\big(\ln(x+1)-\ln x\big)$$

$$=\int_1^2 \ln x\,dx - \int_0^1 \ln x\,dx \quad \xrightarrow{\int \ln x\,dx = x\ln x - x}$$

$$=(2\ln 2-2)-2(1\ln 1-1)+0-0 = 2\ln 2 .$$

- A unbeschränkt, ∂A Nullmenge

$$A_k = A\cap[-k,k]^n, \quad \text{oder} \quad A_k = A\cap B_k(0).$$