Erinnerung:

Satz: (Gauß'scher Integralsatz)

Sei: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Normalenfeld $\nu : \partial A \to S^{n-1}$, $U \supseteq A$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist

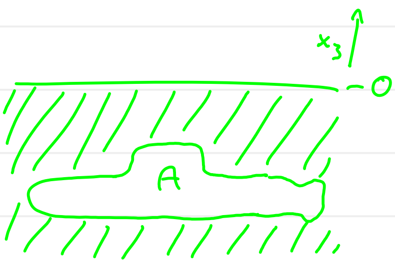
$$\boxed{\int_A \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)}$$

Interpretation:

- $\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$ ist der „Fluß" von F durch ∂A (wenn F z.B. das Geschw.feld einer Flüssigkeit ist.)
- $\operatorname{div} F(x)$ = „Quellstärke" von F bei x

Anwendungsbsp. (Archimed'scher Auftrieb):

Beschreibt $A \subseteq \mathbb{R}^3$ einen in eine Flüssigkeit mit Dichte ϱ eingetauchten Körper, auf den bei $x \in \partial A$ der Druck $\varrho x_3 \nu(x)$ ausgeübt wird, dann ist die gesamte Auftriebskraft: $x_3 < 0$!



$$f = \int_{\partial A} \varrho\, x_3\, \nu(x)\, dS(x) \quad \text{mit Komponenten}$$

$$f_j = \int_{\partial A} \varrho\, x_3\, \nu_j(x)\, dS(x) = \varrho \int_A \frac{\partial x_3}{\partial x_j}\, dx = \begin{cases} \underbrace{\varrho \operatorname{vol}(A)}_{=\text{ Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.}}, & j = 3 \\ 0 \end{cases}$$

Gauß mit $F_k = \varrho\, x_3\, \delta_{kj}$

Bemerkung: Für $n=1$ ist Gauß = HDI, denn mit $A=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ haben wir

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_A \operatorname{div} F(x)\,dx \overset{\text{„Gauß"}}{=} \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{„Oberflächenint." mit } \partial A=\{a,b\}}$$

Korollar: (mehr-dimensionale partielle Integration)

Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand & äußerem Normalenfeld ν. Dann gilt für alle $f,h\in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $U\supseteq A$ offen & alle $j=1,\dots,n$:

$$\boxed{\int_A h(x)\,\partial_j f(x)\,dx = \int_{\partial A} h(x)\,f(x)\,\nu_j(x)\,dS(x) - \int_A f(x)\,\partial_j h(x)\,dx}$$

Beweis: wir definieren $F\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $F(x):=h(x)\,f(x)\,e_j$ wobei $e_j\in\mathbb{R}^n$ der j-te Einheitsvektor ist. Dann gilt

$$\int_A \operatorname{div} F(x)\,dx = \int_A \Big(h(x)\,\partial_j f(x) + f(x)\,\partial_j h(x)\Big)\,dx$$

Gauß $\longrightarrow$ $\|$

$$\int_{\partial A} \langle F(x),\nu(x)\rangle\,dS(x) = \int_{\partial A} h(x)\,f(x)\,\nu_j(x)\,dS(x)$$

$\square$

Korollar: (Erste Green'sche Formel)

Sei $A\subseteq\mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $U\supseteq A$ offen und $g\in C^2(U,\mathbb{R})$, $f\in C^1(U,\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\int_{\partial A} f(x)\,\langle\nabla g(x),\nu(x)\rangle\,dS(x) = \int_A \langle\nabla f(x),\nabla g(x)\rangle + f(x)\,\Delta g(x)\,dx$$

$$\left(\text{also } \int_{\partial A} f\,\vec{\nabla} g\cdot d\vec{S} = \int_A \vec{\nabla} f\cdot\vec{\nabla} g + f\,\Delta g\,dx\right)$$

Beweis: setze $h(x)=\partial_j g(x)$ in der Gleichung zur mehr-dim. part. Integration und summiere über j.

$\square$

Weitere Folgerungen aus dem Gauß'schen Integralsatz:

① Volumenberechnung als Oberflächenintegral:

$$\mathrm{vol}(A) = \int_A dx \underset{\substack{\uparrow \\ F(x):=x,\ x\in A\subseteq\mathbb{R}^n}}{=} \frac{1}{n}\int_A \nabla\cdot F(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{\partial A} \langle x, \nu(x)\rangle\, dS(x)$$

② Eindeutigkeit der Lösung der Poisson Gleichung:

Gegeben: $g\in C^2(V\supseteq\partial A,\mathbb{R})$, $f\in C(A,\mathbb{R})$

Gesucht: $\phi\in C^2(U\supseteq A,\mathbb{R})$, so daß

$$\Delta\phi(x) = f(x)\quad \forall x\in A \qquad \text{„Poisson Gleichung"}$$

$$\text{mit}\quad \begin{cases} \phi(x) = g(x) & \forall x\in\partial A \quad \text{„Dirichlet R.b."} \quad \text{oder} \\ \nabla\phi(x) = g(x) & \text{–"–} \quad \text{„Neumann R.b."} \end{cases}$$

Angenommen es gibt zwei Lösungen ϕ_1, ϕ_2.

$\psi := \phi_1 - \phi_2$ löst dann die „Laplace Gleichung" $\Delta\psi = 0$

und aus der ersten Green'schen Formel folgt:

$$\int_A \|\nabla\psi(x)\|^2 + \underbrace{\psi(x)\Delta\psi(x)}_{=0}\,dx = \int_{\partial A} \underbrace{\psi\langle\nabla\psi(x), \nu(x)\rangle}_{=0 \text{ da entweder } \psi|_{\partial A}=0 \text{ oder } \nabla\psi|_{\partial A}=0,}\, dS(x)$$

Demnach ist $\int_A \|\nabla\psi(x)\|^2 = 0$ und wegen Stetigkeit $\nabla\psi = 0$

Dirichlet: $\psi|_{\partial A} = 0 \wedge \nabla\psi = 0$ also $\phi_1 = \phi_2$

Neumann: $\nabla\psi|_{\partial A} = 0 \wedge \nabla\psi = 0$ also $\phi_1 = \phi_2 + \text{const.}$

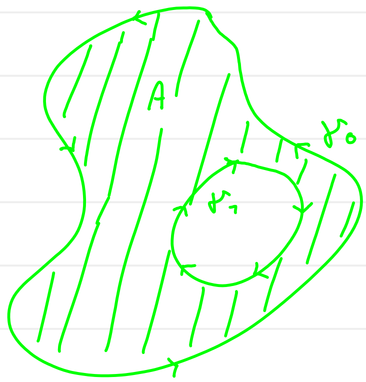
Stokes'scher Integralsatz

Wir betrachten zunächst ein beschränktes Gebiet $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dessen Rand durch die disjunkte Vereinigung von geschl. Kurven

$$\partial A = \bigcup_{i=0}^{n} \gamma_i([a_i,b_i])$$ gegeben ist, wobei

$\gamma_i \in C^1([a_i,b_i] \subseteq \mathbb{R}, \partial A)$, so dass

alle γ_i bzgl. A in math. positiver Richtung durchlaufen werden.



Satz: (Satz von Green / Stokes für $n=2$):

Sei: $U \supseteq A$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 =: \nabla \times f$. Dann gilt unter obigen Annahmen:

$$\boxed{\int_A \nabla \times f(y)\, dy = \sum_{i=0}^{n} \oint_{\gamma_i} f(r) \cdot dr}$$

Beweis: Definiere $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ als $F(x) := (f_2(x), -f_1(x))$. Dann ist

$$\int_A \operatorname{rot} f(x)\, dx = \int_A \operatorname{div} F(x)\, dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle\, dS(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \langle F(\gamma_i(t)), \nu(\gamma_i(t)) \rangle \, \|\dot{\gamma}_i(t)\|\, dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \langle f(\gamma_i(t)), \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nu(\gamma_i(t))} \rangle \, \|\dot{\gamma}_i(t)\|\, dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \oint_{\gamma_i} f(r) \cdot dr$$

$= \dfrac{\dot{\gamma}_i(t)}{\|\dot{\gamma}_i(t)\|}$ da durch 90° Drehung aus Normalenvektor ein normierter Tangentialvekt. wird

= „Zirkulation von f entlang γ"

$\square$

Erinnerung:

- Im $\mathbb{R}^3$ ist $(\nabla \times F(x))_i := (\text{rot}\, F(x))_i := \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k(x)$.
- $F = \nabla\phi \iff \oint F(r)\cdot dr = 0$ Gradientenfeld $\iff$ konservativ
- $F = \nabla\phi,\ \phi \in C^2 \Rightarrow \nabla \times F = 0$ rotationsfrei
- $\nabla \times F = 0$ auf sternförmigem Gebiet $\Rightarrow F = \nabla\phi$
- $F = \nabla \times A,\ A \in C^2 \Rightarrow \nabla \cdot F = 0$ divergenzfrei

  Die Umkehrung $\Leftarrow$ gilt wieder für sternförmige Gebiete

Bemerkung: Ist $F \in C^2(V \subseteq \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, V beschränkt & sternförmig, dann gibt es $\phi \in C^1(V, \mathbb{R})$ und $A \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$, so dass

$$F = \underbrace{\nabla\phi}_{\text{rot. frei}} + \underbrace{\nabla \times A}_{\text{div. frei}}$$ „Helmholtz Zerlegung"

Interpretation der Rotation wenn F Geschw.feld einer Flüssigkeit ist:

$$\frac{\nabla \times F}{\|\nabla \times F\|} \;\hat{=}\; \text{Rotationsachse}$$

$$\|\nabla \times F\| \;\hat{=}\; \text{doppelte Winkelgeschw.}$$